

Skript zum
Brückenkurs Mathematik
für Studierende der Mathematik und Informatik and der Uni Mainz
mit KI-Hilfe digitalisierten Vorlesungsnotizen

Dr. Anton Malevich

Letze Aktualisierung am 7. Oktober 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
1.1	Allgemeine Hinweise zum Lernen im Mathematikstudium	4
1.2	KI bewusst nutzen	5
1.3	Wie kann man Spaß an Mathematik finden?	10
1.4	Interessante Aufgaben	11
2	Arithmetische und geometrische Folgen, Grenzwerte	24
2.1	Die Σ -Notation	24
2.2	Arithmetische Folgen	24
2.3	Geometrische Folgen und Reihen	26
2.4	Grenzwerte	29
2.5	Wachstumsraten von Folgen für $n \rightarrow \infty$	32
3	Lineare Gleichungen und Geometrie	34
3.1	Geraden in $\mathbb{R}^2$	34
3.2	Abstand	36
3.3	Parameterdarstellung	39
3.4	Raum $\mathbb{R}^3$	39
4	Quadratische Ergänzung	45
4.1	Reduktion zu linearen Gleichungen	45
4.2	Kreise	48
4.3	Graph einer quadratischen Funktion	53
5	Trigonometrie	56
5.1	Definition am Einheitskreis und am Dreieck	56
5.2	Dreiecksgeometrie	59
5.3	Trigonometrische Gleichungen	61
5.4	Arcus-Funktionen	62
6	Wurzeln, Exponentialfunktion und Logarithmus	64
6.1	Potenzen und Wurzeln	64
6.2	Exponentialfunktion	67
6.3	Logarithmen	68

7	Ableitungen und Kurvendiskussion	72
7.1	Rechenregeln und Standardableitungen	72
7.2	Höhere Ableitungen	74
7.3	Differenzierbarkeit	75
7.4	Intervalle der Monotonie	76
7.5	Globale Minima und Maxima	81
8	Integrieren und Integrationstechniken	83
8.1	Stammfunktionen und bestimmte Integrale	83
8.2	Unbestimmte Integrale	86
8.3	Substitutionsregel	86
8.4	Partielle Integration	88
8.5	Flächen unter Funktionsgraphen	89
8.6	Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen	90
9	Beweise und Kombinatorik	93
9.1	Gegenbeispiele	93
9.2	Vollständige Induktion	94
9.3	Widerspruchsbeweis	96
9.4	Kombinatorik	96
10	Mengen und Logik	100
10.1	Aussagenlogik	100
10.1.1	Wahrheitstafeln	100
10.1.2	Tautologien	101
10.1.3	Quantoren	102
10.2	Mengen	103

Tag 1

Einführung

1.1 Allgemeine Hinweise zum Lernen im Mathematikstudium

Für das Studium der Mathematik ist es wichtig, sich früh an die Arbeitsweise an der Universität zu gewöhnen. Vieles funktioniert anders als in der Schule: Man bekommt nicht alles fertig erklärt und eingeübt, sondern muss selbst aktiv werden. Die folgenden Punkte sollen helfen, den Einstieg besser zu verstehen und den Brückenkurs sinnvoll zu nutzen.

- Wissen wird nicht mehr einfach gefüttert: An der Universität wird Wissen nicht mehr Schritt für Schritt so aufbereitet, dass man es nur noch aufnehmen muss. Studierende müssen aktiv mitdenken, nachfragen, nacharbeiten und versuchen, das Wissen aus Vorlesungen, Übungen, Büchern und Gesprächen selbst herauszuholen.
- Lernen heißt Üben: Mathematik versteht man nicht allein durch Zuhören oder Lesen. Man muss selbst Aufgaben rechnen, Ansätze ausprobieren und überprüfen, ob man die Ideen wirklich anwenden kann.
- Eigenverantwortung übernehmen: Jede Person muss selbst einschätzen, ob der eigene Wissensstand ausreicht oder ob mehr Übung nötig ist. Die Klausur zeigt zwar am Ende, ob die Grundlagen sitzen, aber wenn man das erst dort merkt, ist es meistens zu spät.
- Der Brückenkurs ist ein Selbsthilfekurs: Der Brückenkurs soll nicht alle Probleme automatisch lösen. Er hilft dabei, Lücken zu erkennen, wichtige Grundlagen zu wiederholen und herauszufinden, woran man selbst weiterarbeiten muss.
- Frühzeitig planen: Der Zeitplan für das Semester ist bereits bekannt. Deshalb sollte man jetzt schon klären, welche Veranstaltungen man besuchen

wird und welche Vorkenntnisse dafür wichtig sind. So kann man sich gezielt vorbereiten.

- Wochenablauf an der Universität verstehen: Eine typische Woche besteht nicht nur aus Vorlesungen. Dazu kommen Übungen, Tutorien, Nachbereitung, Hausaufgaben, Lerngruppen und eigenständiges Wiederholen. Gerade in Mathematik ist die Zeit außerhalb der Vorlesung entscheidend.

1.2 KI bewusst nutzen

Künstliche Intelligenz kann beim Lernen sehr hilfreich sein. Sie kann Begriffe erklären, Beispiele erzeugen, Zusammenfassungen schreiben, Rechenwege kommentieren oder auf mögliche Fehler hinweisen. Richtig eingesetzt ist KI also ein gutes Werkzeug, um das eigene Verständnis zu verbessern.

Wichtig ist aber: KI darf die eigene Arbeit nicht ersetzen. Wer Aufgaben nur von einer KI lösen lässt und die Lösung anschließend abschreibt, übt nicht selbst. Dann entsteht leicht der Eindruck, man habe den Stoff verstanden, obwohl man die entscheidenden Schritte nicht selbst ausführen kann.

Gerade in der Mathematik ist das besonders problematisch. Man lernt Mathematik nicht dadurch, dass man fertige Lösungen liest. Man lernt Mathematik vor allem dadurch, dass man selbst versucht, ein Problem zu lösen, dabei Fehler macht, diese Fehler untersucht und den eigenen Lösungsweg verbessert.

In letzter Zeit werden häufig Lösungen abgegeben, die offensichtlich von KI erzeugt wurden. Teilweise werden dabei auch sehr grobe Fehler einfach übernommen. Das zeigt, dass die Lösung nicht kritisch geprüft wurde. Manchmal tauchen auch Begriffe, Methoden oder Notationen auf, die in der Vorlesung noch gar nicht eingeführt oder verwendet wurden. Auch daran erkennt man, dass nicht wirklich mit dem eigenen Vorlesungsstoff gearbeitet wurde.

Für das Lernen ist das gefährlich. Eine KI kann zwar oft eine richtige Lösung erzeugen, aber in der Klausur muss man selbst entscheiden, welcher Ansatz passt, welche Umformung erlaubt ist und wie die Rechnung sauber durchgeführt wird. Genau diese Fähigkeiten entstehen nur durch eigenes Üben.

Deshalb gibt es mittlerweile an vielen Stellen kaum noch Punkte für Hausaufgaben. Der Grund ist nicht, dass Hausaufgaben unwichtig wären. Im Gegenteil: Hausaufgaben sind für das Lernen sehr wichtig. Aber als Leistungsnachweis sind sie schwieriger geworden, weil KI viele Aufgaben lösen kann. Die Zulassung zur Klausur wird deshalb häufig eher über Zwischentests, Kurztests oder andere Formate geregelt, bei denen das eigene Können direkter sichtbar wird.

Nutzen Sie KI daher nicht als Ersatz für das Denken, sondern als Unterstützung beim Denken. Sinnvoll ist zum Beispiel:

- zuerst selbst einen Lösungsversuch aufzuschreiben,

- danach gezielt nach einer Erklärung zu einem unklaren Schritt zu fragen,
- eine eigene Lösung auf Fehler prüfen zu lassen,
- sich ein ähnliches Beispiel geben zu lassen,
- sich einen Begriff noch einmal einfacher erklären zu lassen.

Weniger sinnvoll ist:

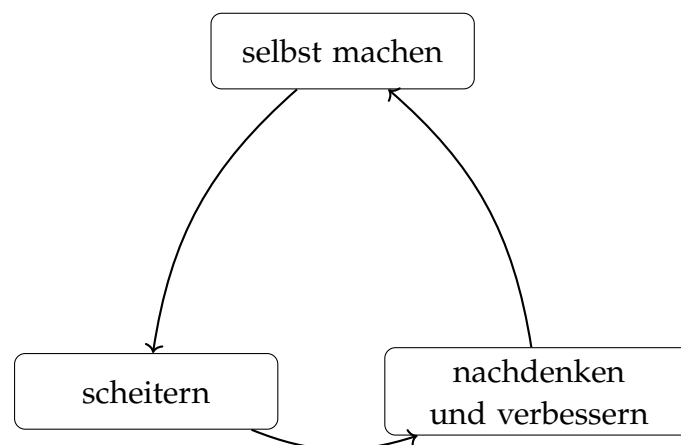
- die Aufgabe direkt vollständig lösen zu lassen,
- eine Lösung ohne Prüfung abzuschreiben,
- Rechenschritte zu übernehmen, die man selbst nicht erklären kann,
- Notation oder Methoden zu verwenden, die im Kurs noch gar nicht vorkamen.

Eine gute Kontrollfrage lautet immer:

Kann ich diesen Schritt selbst erklären?

Wenn die Antwort nein ist, dann ist die Lösung für das eigene Lernen noch nicht ausreichend.

Machen Sie sich das Lernen nicht dadurch kaputt, dass Sie schwierige Schritte sofort auslagern. Man lernt sehr viel durch das wiederholte Anwenden desselben Grundschemas:



Genau dieser Prozess ist nicht immer angenehm, aber er ist der eigentliche Lernprozess. Das kennt man auch aus vielen anderen Bereichen: Fahrradfahren lernt man nicht durch Zuschauen, Schuhe binden nicht durch eine Erklärung allein, und ein Handwerk lernt man nicht, indem jemand anderes die Arbeit übernimmt. Man muss es selbst versuchen, Fehler machen, darüber nachdenken und es erneut probieren.

Genauso ist es in der Mathematik. Eine Aufgabe selbst zu bearbeiten ist oft mühsam, aber gerade dadurch entsteht Verständnis. Künstliche Intelligenz kann dabei helfen, zum Beispiel indem sie einen Hinweis gibt, eine Definition anders erklärt oder einen Fehler sichtbar macht. Sie sollte aber nicht die eigene Arbeit ersetzen. Wer den schwierigen Teil immer sofort abgibt, überspringt genau den Teil, in dem Lernen stattfindet.

Tipps von KI für den Umgang mit KI beim Lernen

Die folgenden Hinweise stammen von COPILOT.

1. Gute Nutzung von KI

- **Begriffe erklären lassen.**

Wenn ein Begriff unklar ist, kann KI hilfreich sein. Zum Beispiel kann man fragen:

```
Erkläre mir den Unterschied zwischen notwendiger  
und hinreichender Bedingung.
```

Danach sollte man selbst prüfen, ob die Erklärung zur Vorlesung passt. Außerdem sollte man den Begriff an eigenen Beispielen anwenden.

- **Hinweise statt vollständiger Lösungen erfragen.**

Sehr sinnvoll ist es, nicht sofort nach der ganzen Lösung zu fragen, sondern nur nach einem kleinen Hinweis:

```
Gib mir nur einen ersten Tipp,  
aber löse die Aufgabe nicht vollständig.
```

So bleibt die eigentliche Denkarbeit bei einem selbst. Genau diese Denkarbeit ist für das Lernen entscheidend.

- **Eigene Lösungen überprüfen lassen.**

Man kann zuerst selbst rechnen und danach die eigene Lösung überprüfen lassen:

```
Ich habe diese Lösung versucht.  
Wo könnte ein Fehler sein?  
Bitte löse die Aufgabe nicht neu.
```

Das ist deutlich besser, als die Aufgabe direkt lösen zu lassen. Denn vorher hat man bereits selbst versucht, einen Lösungsweg zu finden.

- **Ähnliche Aufgaben erzeugen lassen.**

Wenn man eine Aufgabe verstanden hat, kann man KI bitten, ähnliche Übungsaufgaben zu erstellen:

Gib mir drei ähnliche Aufgaben,
aber ohne Lösung.

Danach kann man die Aufgaben selbst bearbeiten. So wird KI zu einem Übungspartner und nicht zu einem Ersatz für die eigene Arbeit.

- **Fehler erklären lassen.**

Wenn ein Fehler gefunden wurde, kann KI helfen, diesen Fehler zu verstehen:

Warum ist dieser Schritt falsch?
Erkläre es mir bitte an einem einfachen Beispiel.

Das ist oft wertvoller als nur die richtige Lösung zu sehen. Wer den eigenen Fehler versteht, macht ihn beim nächsten Mal seltener.

- **Notation klären.**

KI kann helfen, mathematische Schreibweisen in einfachen Worten zu erklären:

Was bedeutet diese Schreibweise?
Erkläre sie bitte in einfachen Worten.

Dabei gilt aber: Die Notation aus der Vorlesung ist maßgeblich. Wenn KI eine andere Schreibweise verwendet, sollte man sie nicht ungeprüft übernehmen.

- **Zusammenfassungen nach eigener Arbeit erstellen lassen.**

Nach dem Bearbeiten eines Themas kann KI helfen, die wichtigsten Ideen zu ordnen:

Fasse die wichtigsten Ideen zu Extremwertaufgaben
kurz und übersichtlich zusammen.

Eine solche Zusammenfassung ersetzt aber nicht das Rechnen. Sie hilft nur dabei, den Stoff nachträglich zu strukturieren.

2. Problematische Nutzung von KI

- **Lösungen abschreiben.**

Nicht sinnvoll ist es, eine Aufgabe vollständig lösen zu lassen und die Antwort einfach zu übernehmen. Dann hat man vielleicht eine fertige Lösung, aber kein eigenes Können aufgebaut. In der Klausur hilft das nicht.

- **Unverstandene Schritte übernehmen.**

Auch wenn eine KI-Lösung richtig aussieht, kann sie Schritte enthalten, die man selbst nicht erklären kann. Solche Schritte sollte man nicht übernehmen.

Eine einfache Regel lautet:

Was ich nicht erklären kann, gehört nicht in meine Lösung.

- **Zu hohe Methoden verwenden.**

Manchmal verwendet KI Methoden, die in der Vorlesung noch nicht behandelt wurden. Das kann auffällig sein und ist außerdem didaktisch nicht sinnvoll. Ziel ist nicht irgendeine Lösung, sondern eine Lösung mit den Mitteln, die im Kurs gelernt werden.

- **Falsche Sicherheit.**

KI formuliert oft sehr überzeugend, auch wenn eine Lösung falsch ist. Dadurch kann eine gefährliche Sicherheit entstehen. Rechenschritte, Voraussetzungen und Ergebnisse müssen deshalb immer kritisch geprüft werden.

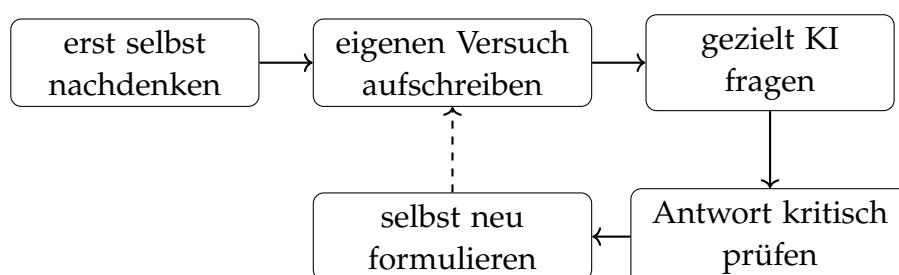
- **Rechnen ohne Verständnis.**

Eine KI kann viele Rechnungen schnell ausführen. Das bedeutet aber nicht, dass man selbst verstanden hat, warum diese Rechnung gemacht wird. In mathematischen Aufgaben ist die Wahl des richtigen Ansatzes oft genauso wichtig wie das Rechnen selbst.

3. Praktische Tipps

- **Erst Kopf, dann KI.**

Eine sinnvolle Reihenfolge ist:



So bleibt KI ein Werkzeug und wird nicht zur Ausrede, die eigene Arbeit zu vermeiden. Die Antwort der KI wird nicht einfach übernommen, sondern zuerst überprüft und danach in eigenen Worten sauber aufgeschrieben.

- **Die Lösung selbst reproduzieren.**

Nach jeder KI-Hilfe sollte man die Lösung noch einmal ohne KI selbst aufschreiben. Wenn das gelingt, war die Hilfe wahrscheinlich sinnvoll. Wenn das nicht gelingt, wurde die Lösung noch nicht wirklich verstanden.

- **Kleine Fragen statt großer Auftrag.**

Besser als diese Frage:

Löse diese Aufgabe.

sind kleine, gezielte Fragen wie:

Warum darf man hier quadrieren?

oder:

Welche Bedingung muss ich nach dem Quadrieren prüfen?

Kleine Fragen fördern das Verständnis deutlich stärker als fertige Komplettlösungen.

- **Eigenständigkeit als Ziel.**

Das Ziel ist nicht, möglichst schnell perfekte Lösungen zu produzieren. Das Ziel ist, mathematisch arbeitsfähig zu werden. Dazu gehört, Aufgaben selbst zu beginnen, Fehler auszuhalten, Fragen zu stellen und den eigenen Lösungsweg zu verbessern.

1.3 Wie kann man Spaß an Mathematik finden?

Mathematik kann besonders dann Freude machen, wenn man sie nicht nur als Pflichtfach oder Rechentechnik sieht. Interessant wird Mathematik oft dort, wo man selbst Zusammenhänge entdeckt, eigene Ideen ausprobiert und merkt, dass man ein Problem wirklich verstanden hat.

- Erfolgserlebnisse wahrnehmen: Es motiviert sehr, wenn man merkt, dass man ein Problem Schritt für Schritt besser versteht und schließlich selbst lösen kann.

- Der Weg ist das Ziel: In der Mathematik zählt nicht nur das Ergebnis. Auch falsche Ansätze, Umwege und neue Versuche gehören dazu und helfen beim Verstehen.
- Mathematik als Puzzle sehen: Viele Aufgaben bestehen daraus, passende Ideen zu finden, verschiedene Methoden auszuprobieren und am Ende zu erkennen, wie die einzelnen Teile zusammenpassen.
- Zusammenhänge entdecken: Besonders spannend wird Mathematik, wenn man versteht, warum Begriffe, Sätze oder Methoden miteinander verbunden sind.
- Beispiele und Gegenbeispiele suchen: Abstrakte Definitionen werden oft erst durch konkrete Beispiele verständlich. Gegenbeispiele zeigen außerdem, wo eine Aussage nicht mehr gilt.
- Überraschungen zulassen: Paradoxa, unerwartete Ergebnisse und ungewöhnliche Fragen zeigen, dass Mathematik lebendig ist und nicht immer so funktioniert, wie man zuerst denkt.
- Gemeinsam arbeiten: Im Austausch mit anderen entstehen oft neue Ideen. Außerdem merkt man, dass Schwierigkeiten normal sind und gemeinsam leichter überwunden werden können.
- Bezüge zur realen Welt finden: Viele mathematische Ideen tauchen in Natur, Technik, Informatik, Wirtschaft oder anderen Wissenschaften wieder auf. Solche Verbindungen können helfen, abstrakte Inhalte greifbarer zu machen.

1.4 Interessante Aufgaben

(1.1) Beispiel. Ein Krokodil möchte ein Zebra erreichen, das sich auf der anderen Seite eines Flusses befindet. Der Fluss ist 6 m breit und hat keine Strömung. Das Zebra steht am gegenüberliegenden Ufer, aber nicht direkt gegenüber dem Krokodil, sondern 20 m weiter flussaufwärts.

Das Krokodil kann an Land mit der Geschwindigkeit v m/s laufen und im Wasser mit der Geschwindigkeit w m/s schwimmen. Dabei gilt $v > w$.

Gesucht ist der schnellste Weg zum Zebra. Das Krokodil muss also entscheiden, wie weit es zuerst am Ufer entlangläuft und an welcher Stelle es ins Wasser geht.

Wir beschreiben den Weg des Krokodils durch die Variable x mit

$$0 \leq x \leq 20.$$

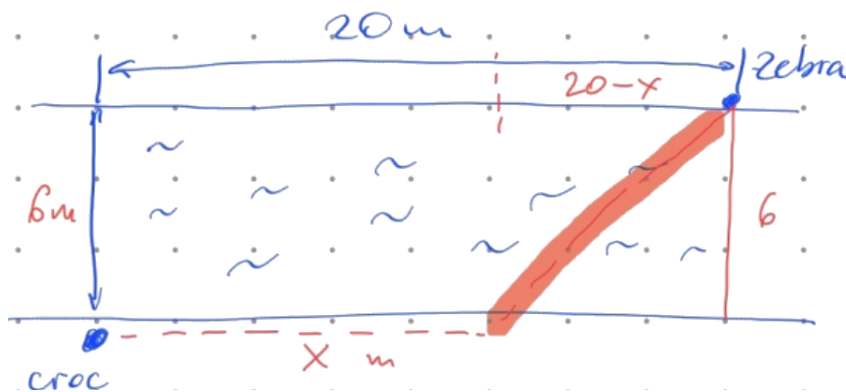


Abbildung 1.1: Skizze zur Frage: Welchen Weg sollte das Krokodil wählen, um das Zebra möglichst schnell zu erreichen?

Dabei ist x die Strecke, die das Krokodil zuerst an Land läuft. Danach schwimmt das Krokodil schräg durch den Fluss zum Zebra. Die gesamte benötigte Zeit hängt also von der Wahl von x ab. Ziel ist es, x so zu wählen, dass die Gesamtzeit möglichst klein wird.

Nun fragen wir uns, für welche Funktion das Minimum gesucht wird.

Die Gesamtzeit setzt sich aus der Zeit an Land und der Zeit im Wasser zusammen:

$$f(x) = \underbrace{\frac{x}{v}}_{\text{Zeit an Land}} + \underbrace{\frac{1}{w} \sqrt{(20-x)^2 + 6^2}}_{\text{Zeit im Wasser}} \quad (\text{s}).$$

Gesucht ist also das Minimum von f auf dem Intervall

$$0 \leq x \leq 20.$$

Sei ab jetzt konkret

$$v = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad w = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Wir klären zuerst, wie lange das Krokodil braucht, wenn es

- nur schwimmt;
- zuerst 20 m an Land läuft und dann 6 m senkrecht durch den Fluss schwimmt.

Erst danach werden wir uns der Frage c) widmen, was die mögliche minimale Gesamtzeit ist. $\triangleleft$

Lösung. Wir betrachten zuerst die Randpunkte. So kann man später vergleichen, ob der gefundene kritische Punkt tatsächlich eine bessere Zeit liefert.

a) Für $x = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \frac{\sqrt{(20-0)^2 + 6^2}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{20^2 + 6^2}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{400 + 36}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{436}}{2} \\
 &\approx \frac{20,88}{2} \\
 &= 10,44 \text{ s.}
 \end{aligned}$$

b) Für $x = 20$ gilt:

$$\begin{aligned}
 f(20) &= \frac{20}{2,5} + \frac{\sqrt{(20-20)^2 + 6^2}}{2} \\
 &= \frac{40}{5} + \frac{6}{2} \\
 &= 8 + 3 \\
 &= 11 \text{ s.}
 \end{aligned}$$

c) Nun bestimmen wir die Ableitung, um mögliche Extremstellen im Inneren des Intervalls zu finden:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{2,5} + \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{(20-x)^2 + 6^2} \right)' \\
 &= \frac{1}{2,5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-20}{\sqrt{(20-x)^2 + 6^2}}.
 \end{aligned}$$

Nebenrechnung (Ableitung der Wurzel).

$$\begin{aligned}
 \left[\sqrt{(20-x)^2 + 6^2} \right]' &= \left[((20-x)^2 + 6^2)^{1/2} \right]' \\
 &= \frac{1}{2} \cdot ((20-x)^2 + 6^2)^{-1/2} \cdot 2(20-x) \cdot (-1) \\
 &= \frac{x-20}{\sqrt{(20-x)^2 + 6^2}}
 \end{aligned}$$

Für eine mögliche Extremstelle setzen wir $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} + \frac{x-20}{2\sqrt{(20-x)^2 + 6^2}} &= 0 \\ \frac{x-20}{2\sqrt{(20-x)^2 + 6^2}} &= -\frac{2}{5} \\ x-20 &= -\frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{(20-x)^2 + 6^2}.\end{aligned}$$

Um den Wurzelausdruck auf der rechten Seite zu beseitigen, quadrieren wir. (Dabei können allerdings möglicherweise neue Lösungen entstehen, die die Originalgleichung nicht Lösen!)

$$\begin{aligned}(x-20)^2 &= \frac{16}{25} \left((20-x)^2 + 6^2 \right) \\ (x-20)^2 - \frac{16}{25}(20-x)^2 &= \frac{16 \cdot 6^2}{25}.\end{aligned}$$

Wegen $(20-x)^2 = (x-20)^2$ folgt:

$$\begin{aligned}(x-20)^2 - \frac{16}{25}(x-20)^2 &= \frac{16 \cdot 36}{25} \\ (x-20)^2 \cdot \frac{9}{25} &= \frac{16 \cdot 36}{25} \\ (x-20)^2 &= \frac{16 \cdot 36}{9} \\ (x-20)^2 &= 64 \\ x-20 &= \pm\sqrt{64} \\ x-20 &= \pm 8.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x = 28 \quad \text{oder} \quad x = 12.$$

Da in der Aufgabe nur Werte im betrachteten Bereich $0 \leq x \leq 20$ sinnvoll sind, scheidet $x = 28$ aus. Es bleibt also:

$$x = 12.$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
 f(12) &= 12 \cdot \frac{1}{2,5} + \frac{\sqrt{(20-12)^2 + 6^2}}{2} \\
 &= \frac{12}{2,5} + \frac{\sqrt{8^2 + 6^2}}{2} \\
 &= 4,8 + \frac{\sqrt{64 + 36}}{2} \\
 &= 4,8 + \frac{10}{2} \\
 &= 4,8 + 5 \\
 &= 9,8 \text{ s.}
 \end{aligned}$$

Da $f(12) = 9,8 \text{ s}$ kleiner ist als die Randwerte $f(0) = 10,44 \text{ s}$ und $f(20) = 11 \text{ s}$, ist die minimale Zeit bei

$$x = 12$$

erreicht. (Überlegen Sie gern, warum das hier ausreicht, und kein weiterer Test, z.B. mit der zweiten Ableitung, notwendig ist.)

□

Für diese Lösung werden mehrere bekannte Inhalte aus der Schulmathematik verwendet. Die wichtigsten Punkte sind:

- **Physikalische Grundformeln:** Es wird der Zusammenhang zwischen Zeit, Strecke und Geschwindigkeit verwendet:

$$t = \frac{s}{v}.$$

Damit kann die benötigte Zeit für die einzelnen Streckenabschnitte berechnet werden.

- **Satz des Pythagoras:** Die schräge Strecke wird mit dem Satz des Pythagoras bestimmt. Aus den beiden Katheten $20 - x$ und 6 ergibt sich die Länge

$$\sqrt{(20 - x)^2 + 6^2}.$$

- **Funktionen ableiten:** Um die minimale Zeit zu finden, wird die Zeitfunktion abgeleitet. Dabei braucht man insbesondere die Kettenregel für Wurzelfunktionen, also zum Beispiel

$$\left(\sqrt{g(x)} \right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}.$$

- **Extremstellen und Optimierung:** Die optimale Stelle wird gefunden, indem man die Ableitung gleich null setzt:

$$f'(x) = 0.$$

So bestimmt man mögliche Extremstellen. Anschließend werden diese mit den Randwerten verglichen.

- **Gleichungen umformen:** Beim Lösen der Gleichung werden verschiedene Umformungen verwendet. Dabei ist wichtig, dass nicht jede Umformung automatisch eine äquivalente Gleichung liefert. Bei einer äquivalenten Umformung bleibt die Lösungsmenge unverändert.

Manche Umformungen können zusätzliche Lösungen erzeugen. Das passiert zum Beispiel beim Quadrieren:

$$a = b \implies a^2 = b^2.$$

Die umgekehrte Richtung gilt aber nicht immer, denn aus

$$a^2 = b^2$$

folgt nur

$$a = b \quad \text{oder} \quad a = -b.$$

Deshalb muss man nach dem Quadrieren die gefundenen Lösungen unbedingt in die ursprüngliche Gleichung einsetzen und überprüfen.

Andere Umformungen können Lösungen verlieren. Das kann zum Beispiel passieren, wenn man durch einen Term teilt, der auch Null sein kann. Teilt man durch diesen Term, dann geht der Fall verloren, in dem der Term gleich Null ist.

(1.2) Beispiel. Die Eckpunkte des Dreiecks Δ sind

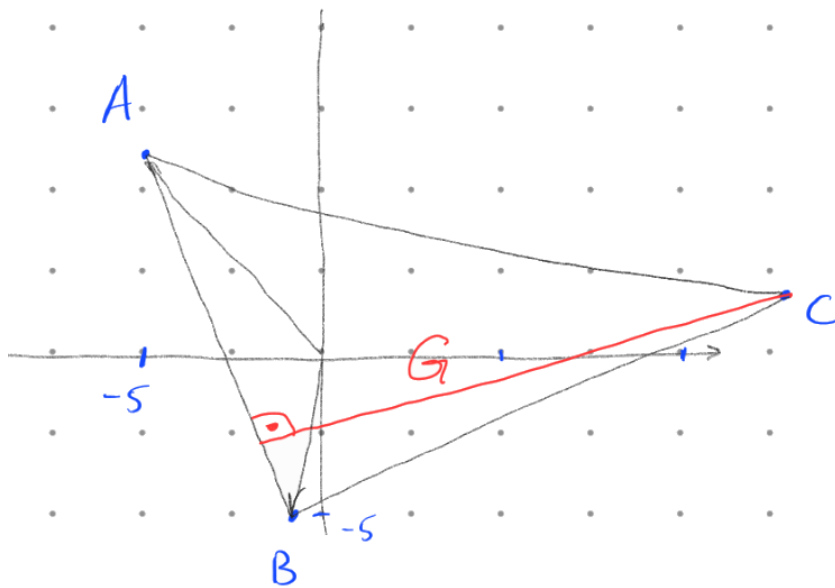
$$A = (-5, 7), \quad B = (-1, -5), \quad C = (13, 3).$$

- a) Zeige, dass die Höhe durch den Punkt C die Gleichung

$$x - 3y = 4$$

hat.

- b) Bestimme die Gleichung der Seitenhalbierenden durch den Punkt B.
 c) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden aus Teil (a) und Teil (b).
 d) Bestimme die Fläche des Dreiecks Δ .



◁

Lösung. a) Wir zeigen, dass die Gerade

$$G : x - 3y = 4$$

die Höhe des Dreiecks durch den Punkt C ist.

Dazu müssen zwei Dinge überprüft werden:

- (i) Der Punkt C liegt auf der Geraden G.
- (ii) Die Gerade G steht senkrecht auf der Seite $\overrightarrow{AB}$.

Zuerst setzen wir die Koordinaten von

$$C = (13, 3)$$

in die Gleichung von G ein:

$$13 - 3 \cdot 3 = 13 - 9 = 4.$$

Damit erfüllt C die Gleichung der Geraden. Also gilt

$$C \in G.$$

Nun zeigen wir, dass G senkrecht auf der Seite $\overrightarrow{AB}$ steht. Dafür berechnen wir den Richtungsvektor der Seite $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Die Gerade G hat die Gleichung

$$x - 3y = 4.$$

Ein Normalenvektor von G ist daher

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 4n.$$

Also ist $\overrightarrow{AB}$ ein Vielfaches des Normalenvektors von G .

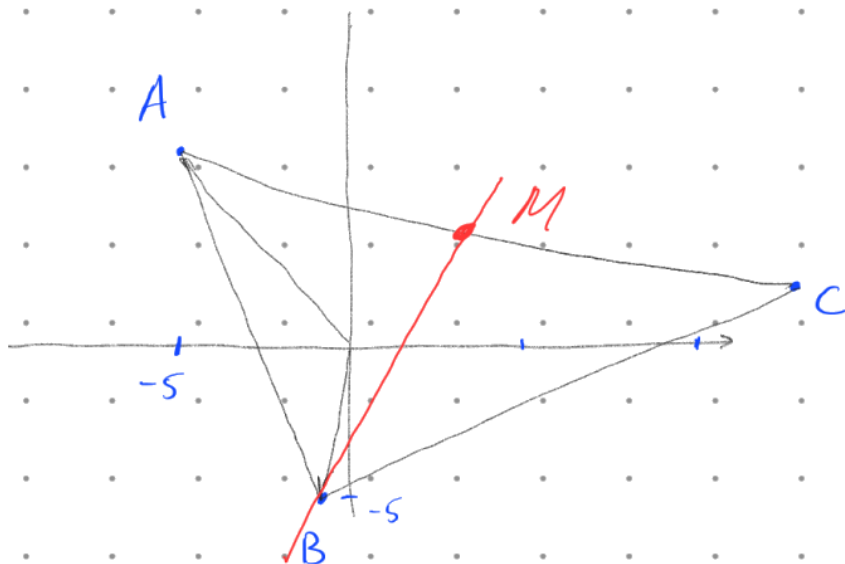
Damit ist die Seite $\overrightarrow{AB}$ senkrecht zur Geraden G . Da außerdem C auf G liegt, ist G die Höhe des Dreiecks durch den Punkt C .

Also hat die Höhe durch C die Gleichung

$$x - 3y = 4.$$

b) Wir bestimmen die Gleichung der Seitenhalbierenden durch den Punkt B .

Die Seitenhalbierende durch B verläuft durch den Punkt B und durch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite $\overrightarrow{AC}$. Sei also M der Mittelpunkt von $\overrightarrow{AC}$.



Zuerst berechnen wir den Mittelpunkt M von $A = (-5, 7)$ und $C = (13, 3)$:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$M = (4, 5).$$

Die gesuchte Seitenhalbierende ist die Gerade durch die Punkte $B = (-1, -5)$ und $M = (4, 5)$. Ein Richtungsvektor dieser Geraden ist

$$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir zunächst die Parameterdarstellung

$$G_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Nun formen wir diese Gerade in eine Koordinatengleichung um. Ein Normalenvektor der Geraden muss senkrecht auf dem Richtungsvektor

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

stehen. Ein solcher Normalenvektor ist

$$n = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

denn

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 10 = 0.$$

Die Koordinatengleichung hat also die Form

$$2x - y = d.$$

Da der Punkt $M = (4, 5)$ auf der Geraden liegt, setzen wir ihn ein:

$$d = 2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3.$$

Damit lautet die Gleichung der Seitenhalbierenden durch B

$$G_2 : 2x - y = 3.$$

- c) Wir bestimmen den Schnittpunkt der beiden Geraden aus Teil (a) und Teil (b).

Aus den vorherigen Teilaufgaben kennen wir die Geraden

$$G : x - 3y = 4$$

und

$$G_2: 2x - y = 3.$$

Gesucht ist der Punkt, der auf beiden Geraden liegt. Dazu lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x - 3y = 4, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Wir formen die zweite Gleichung so um, dass wir sie gut mit der ersten Gleichung kombinieren können. Dazu multiplizieren wir die erste Gleichung mit -2 :

$$\begin{cases} -2x + 6y = -8, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Nun addieren wir beide Gleichungen:

$$5y = -5.$$

Also gilt

$$y = -1.$$

Diesen Wert setzen wir in die erste Gleichung ein:

$$x - 3 \cdot (-1) = 4.$$

Damit folgt

$$x + 3 = 4$$

und somit

$$x = 1.$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist also

$$G \cap G_2 = \{(1, -1)\}.$$

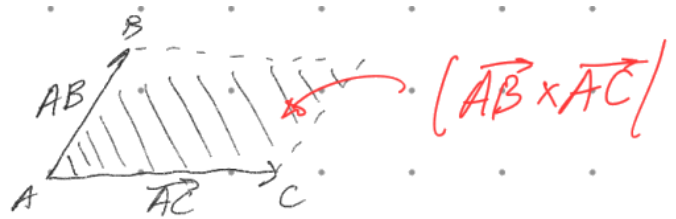
d) Wir bestimmen die Fläche des Dreiecks Δ .

Die Fläche eines Dreiecks ist die Hälfte der Fläche des zugehörigen Parallelogramms. Mit zwei Seitenvektoren des Dreiecks gilt daher

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|.$$

Zuerst berechnen wir die beiden Vektoren:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$



und

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Für das Kreuzprodukt schreiben wir die Vektoren als Vektoren im $\mathbb{R}^3$, indem wir als dritte Koordinate jeweils 0 ergänzen:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot (-4) - (-12) \cdot 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 200 = 100.$$

Die Fläche des Dreiecks beträgt also

$$F_{\Delta} = 100.$$

□

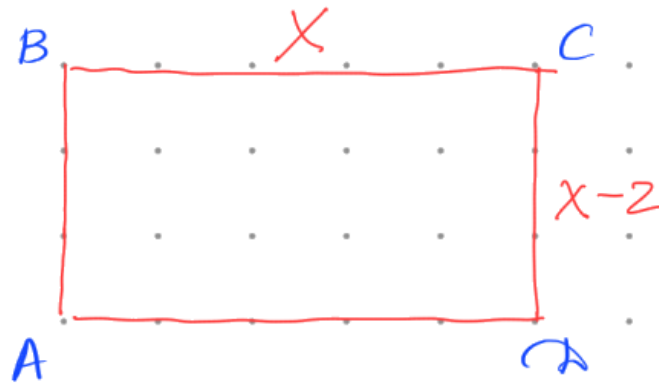
(1.3) Beispiel. Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck. Eine Seite ist x cm groß und die andere ist 2 cm kleiner.

Welche Werte kann x annehmen, wenn der Flächeninhalt des Rechtecks kleiner als 15 cm^2 sein soll?

◁

Lösung. Der Flächeninhalt eines Rechtecks berechnet sich aus

$$F = \text{Länge} \cdot \text{Breite}.$$



Hier sind die Seitenlängen x und $x - 2$. Also gilt

$$F = x \cdot (x - 2).$$

Da der Flächeninhalt kleiner als 15 cm^2 sein soll, erhalten wir die Ungleichung

$$x(x - 2) < 15.$$

Wir lösen diese Ungleichung:

$$\begin{aligned} x(x - 2) &< 15 \\ x^2 - 2x &< 15 \\ x^2 - 2x - 15 &< 0. \end{aligned}$$

Zunächst bestimmen wir die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Mit der Mitternachtsformel erhalten wir

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}.$$

Also gilt

$$x_1 = 5 \quad \text{und} \quad x_2 = -3.$$

Damit können wir faktorisieren:

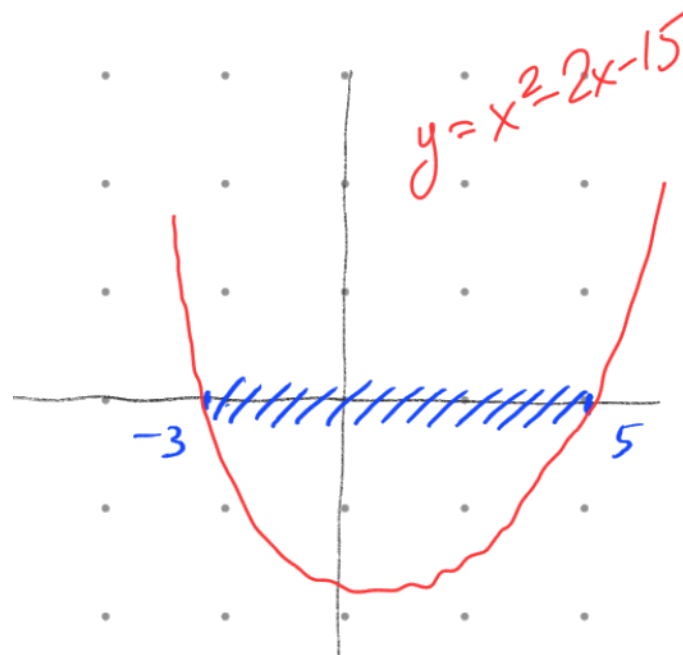
$$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3).$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet. Deshalb ist

$$x^2 - 2x - 15 < 0$$

genau zwischen den beiden Nullstellen erfüllt:

$$-3 < x < 5.$$



Zusätzlich müssen die Seitenlängen des Rechtecks positiv sein. Es gilt

$$x > 0$$

und

$$x - 2 > 0.$$

Aus der zweiten Bedingung folgt

$$x > 2.$$

Zusammen mit

$$-3 < x < 5$$

ergibt sich daher

$$2 < x < 5.$$

□

Tag 2

Arithmetische und geometrische Folgen, Grenzwerte

2.1 Die Σ -Notation

Die Σ -Notation dient zur kompakten Schreibweise endlicher Summen.

(2.1) **Beispiel.** a) Es gilt

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2.$$

Dabei durchläuft der Summationsindex k alle ganzen Zahlen von 1 bis 5.

b) Eine Summe kann auch über eine vorgegebene Indexmenge gebildet werden:

$$\sum_{n \in \{1,3,5\}} n^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2.$$

c) In folgender Summe durchläuft der Index alle ganzen Zahlen von -2 bis 2 :

$$\sum_{j=-2}^2 3^j = 3^{-2} + 3^{-1} + 3^0 + 3^1 + 3^2.$$

◁

2.2 Arithmetische Folgen

Laut einer Legende (siehe auch *Vermessung der Welt* von D. KEHLMANN) hat der kleine 7-jährige Karl Gauß im Unterricht die Summe

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 5050.$$

in wenigen Sekunden richtig berechnet. Heutzutage ist die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen oft kurzehend als „kleiner Gauß“ bezeichnet.

(2.2) Definition. Eine Folge

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

heißt *arithmetische Folge*, wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist. Es gibt also eine Konstante d mit

$$a_{k+1} - a_k = d$$

für alle zulässigen Indizes k . Die Konstante d heißt die *Differenz* der arithmetischen Folge. $\triangleleft$

(2.3) Beispiel. a) Die Folge

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

ist arithmetisch mit der Differenz $d = 1$.

b) Die Folge

$$3, 8, 13, 18, \dots$$

ist arithmetisch mit der Differenz $d = 5$. $\triangleleft$

(2.4) Beispiel. Für die Summe

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

schreiben wir die Summanden einmal in aufsteigender und einmal in absteigender Reihenfolge:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = S \\ 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 = S \\ \hline 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 = 2S \end{array}$$

Durch spaltenweises Addieren entstehen 100 Summen mit dem Wert 101:

$$\underbrace{101 + 101 + \dots + 101}_{100 \text{ Summanden}} = 2S.$$

Somit gilt

$$2S = 100 \cdot 101$$

und daher

$$S = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 5050.$$

$\triangleleft$

Wir suchen nun eine allgemeine Formel für die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge. Sei

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Schreiben wir die Summe erneut in umgekehrter Reihenfolge, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & \cdots & + & a_{n-1} & + & a_n & = & S \\ a_n & + & a_{n-1} & + & a_{n-2} & + & \cdots & + & a_2 & + & a_1 & = & S \\ \hline (a_1 + a_n) & + & (a_2 + a_{n-1}) & + & (a_3 + a_{n-2}) & + & \cdots & + & (a_{n-1} + a_2) & + & (a_n + a_1) & = & 2S. \end{array}$$

Da die Folge arithmetisch ist, haben alle diese Klammern denselben Wert. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} a_2 + a_{n-1} &= (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n, \\ a_3 + a_{n-2} &= (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n. \end{aligned}$$

Insgesamt treten n solche Klammern auf. Daher ist

$$2S = n(a_1 + a_n).$$

Somit haben wir den folgenden Satz bewiesen

(2.5) Satz. Für die Summe S einer arithmetischen Folge $a_1, a_2, \dots, a_n$ gilt

$$S = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n).$$

2.3 Geometrische Folgen und Reihen

(2.6) Definition. Eine Folge

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

heißt *geometrische Folge*, wenn es eine feste Zahl r gibt, sodass

$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$

für jedes n gilt. Die Zahl r heißt der *Quotient* der geometrischen Folge. ◁

(2.7) Beispiel. a) Die Folge

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

ist geometrisch mit $a_0 = 1$ und $r = 2$.

b) Die Folge

$$3, 6, 12, 24, 48, \dots$$

ist geometrisch mit $a_0 = 3$ und $r = 2$.

c) Die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

ist geometrisch mit $a_0 = 1$ und $r = \frac{1}{2}$.

◁

Ist $a_0 = a$, so besitzt die geometrische Folge die Form

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots,$$

also allgemein

$$a_n = ar^n \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots$$

(2.8) Satz. Für die Summe der ersten $n + 1$ Glieder einer geometrischen Folge gilt für $r \neq 1$

$$\sum_{k=0}^n ar^k = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}.$$

Beweis. Wir setzen

$$S_n = \sum_{k=0}^n ar^k.$$

Und betrachten neben S_n noch den Wert rS_n :

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \\ rS_n & = & ar + ar^2 + \dots + ar^n + ar^{n+1} \end{array}$$

Wir bemerken, dass beim Subtrahieren sich alle mittleren Summanden aufheben werden. Somit folgt

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \\ &\quad - ar - ar^2 - \dots - ar^n - ar^{n+1} \\ &= a - ar^{n+1}, \end{aligned}$$

also ist

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^{n+1}).$$

Da $r \neq 1$, können wir durch $1 - r$ teilen und erhalten

$$S_n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}.$$

□

(2.9) Beispiel. Wir berechnen die Summe der ersten 8 Glieder der geometrischen Folge $1, 2, 4, \dots$. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 4 + \dots + 128 &= 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + \dots + 1 \cdot 2^7 \\ &= \sum_{k=0}^7 1 \cdot 2^k = \frac{1(1 - 2^{7+1})}{1 - 2} \\ &= \frac{1 - 256}{-1} = 256 - 1 = 255. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

(2.10) *Bemerkung.* Ist

$$-1 < r < 1,$$

so gilt

$$r^n \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Für $r = 0,95$ erhält man beispielsweise

$$r^{100} \approx 0,00592 \quad \text{und} \quad r^{1000} \approx 0,00592 \cdot 10^{-22}. \quad \triangleleft$$

Symbolisch schreibt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0.$$

(2.11) Definition. Für $-1 < r < 1$ ist die unendliche Summe (die sogenannte *geometrische Reihe* definiert durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n ar^k.$$

Nach Definition (2.6) und Bemerkung (2.10) gilt für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r}.$$

$\triangleleft$

(2.12) Beispiel. Wir berechnen nun die folgenden (unendliche) Summe mit der obigen Formel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

$\triangleleft$

(2.13) Beispiel. Für $a = \frac{1}{2}$ und $r = -\frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \dots &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$\triangleleft$

(2.14) Beispiel (Periodische Dezimalzahlen). Die periodische Dezimalzahl $0,\overline{3}$ lässt sich als geometrische Reihe darstellen:

$$\begin{aligned} 0,\overline{3} = 0,333\ldots &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k \\ &= \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\left(\frac{3}{10}\right)}{\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Analog lässt sich die allgemeine aus der Schule bekannte Formel für die Konversion einer periodischen Dezimalzahl zu einem Bruch herleiten. Es gilt z.B.

$$0,\overline{81} = \frac{81}{99} = \frac{9}{11} \quad \text{oder} \quad 0,\overline{102} = \frac{102}{999} = \frac{34}{111}.$$

◁

2.4 Grenzwerte

(2.15) Motivation. Das Symbol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

liest man als: „der Grenzwert der Folge (a_n) für $n \rightarrow \infty$ “.

Informell bedeutet dies: Wir schauen uns an, was mit den Folgengliedern passiert, wenn n immer größer wird. Dabei interessiert uns nicht mehr das Verhalten einzelner Glieder, sondern die langfristige Entwicklung der Folge.

Ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

so nähern sich die Werte der Folge immer mehr der Zahl L an.

Beispielsweise gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

denn die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

kommt der Zahl 0 beliebig nahe.

Man kann sich den Grenzwert als das *Ziel* vorstellen, auf das die Folge für sehr große n zusteuert. Wichtig ist dabei, dass die Folge den Grenzwert nicht unbedingt erreichen muss. Im obigen Beispiel wird der Wert 0 nie angenommen, aber die Folgenglieder kommen ihm immer näher.

(2.16) Bemerkung. Das Symbol ∞ ist dabei keine gewöhnliche Zahl. Die Schreibweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

bedeutet lediglich, dass wir betrachten, was mit a_n geschieht, wenn n ohne obere Schranke wächst. $\triangleleft$

(2.17) *Bemerkung.* Beim Bestimmen von Grenzwerten ist es häufig hilfreich, zwischen Wachstum und Abnahme zu unterscheiden:

- Potenzen mit Basis größer als 1 wachsen immer weiter.
- Potenzen mit Betrag der Basis kleiner als 1 werden immer kleiner.
- Potenzen mit negativer Basis können zwischen verschiedenen Werten wechseln.

 $\triangleleft$

Für $r > 1$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty.$$

Je öfter wir mit einem Faktor $r > 1$ multiplizieren, desto größer wird das Ergebnis. Daher wächst die Folge unbegrenzt.

(2.18) **Beispiel.** Für $r = 2$ erhalten wir

$$2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

Die Werte werden immer größer, also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty.$$

 $\triangleleft$

Für $-1 < r < 1$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0.$$

Hier wird in jedem Schritt mit einer Zahl multipliziert, deren Betrag kleiner als 1 ist. Dadurch werden die Folgenglieder immer kleiner.

(2.19) **Beispiel.** Für $r = \frac{1}{2}$ entsteht die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

Die Werte nähern sich immer weiter der Zahl 0 an. $\triangleleft$

Der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$$

existiert nicht, da die Folge

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

zwischen den Werten -1 und 1 wechselt.

(2.20) *Bemerkung.* Eine Folge besitzt nur dann einen Grenzwert, wenn sich ihre Glieder für große n einer einzigen Zahl annähern. Da dies hier nicht geschieht, existiert kein Grenzwert. $\triangleleft$

Für $p > 0$ gelten die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = \infty$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} = 0.$$

Die Folge n^p wächst unbegrenzt, während ihr Kehrwert immer kleiner wird. Insbesondere gilt dies für $p = 1$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rightarrow 0.$$

Außerdem gilt für $p > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

Anschaulich bedeutet dies: Für große Wurzelexponenten wird jede positive Zahl immer näher an 1 herangerückt.

(2.21) **Beispiel.** Für $p = 16$ gilt

$$\sqrt[2]{16} = 4, \quad \sqrt[4]{16} = 2, \quad \sqrt[8]{16} = \sqrt{2},$$

und die Werte nähern sich für größere Exponenten immer weiter der Zahl 1. $\triangleleft$

(2.22) **Beispiel (Quotienten).** Wir betrachten den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 4}{3n^2 + 4n + 9}.$$

Bei Quotienten von Polynomen teilt man häufig durch die höchste vorkommende Potenz von n . Dadurch werden alle Terme mit kleineren Potenzen zu Ausdrücken der Form $\frac{1}{n^p}$ mit $p > 0$, die gegen 0 konvergieren.

Wir teilen Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz n^2 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 4}{3n^2 + 4n + 9} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} (2n^2 - 3n + 4)}{\frac{1}{n^2} (3n^2 + 4n + 9)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3\frac{1}{n} + 4\frac{1}{n^2}}{3 + 4\frac{1}{n} + 9\frac{1}{n^2}} = \frac{2 - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{3 + 4 \cdot 0 + 9 \cdot 0} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Für große n werden die Terme $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n^2}$ vernachlässigbar klein. Deshalb bestimmen hier die höchsten Potenzen den Grenzwert. $\triangleleft$

2.5 Wachstumsraten von Folgen für $n \rightarrow \infty$

In der Informatik interessiert man sich häufig dafür, wie schnell Funktionen oder Folgen wachsen. Dies spielt beispielsweise bei der Analyse von Algorithmen eine wichtige Rolle: Ein Algorithmus mit langsam wachsender Laufzeit ist für große Eingaben meist deutlich effizienter als ein Algorithmus mit schnell wachsender Laufzeit.

Wir vergleichen daher verschiedene wichtige Wachstumsarten.

Für $p > 0$ wächst die Potenz

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{p\text{-mal}} = n^p$$

langsamer als die Exponentialfunktion

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}} = a^n$$

für $a > 1$.

Anschaulich wird bei n^p nur eine feste Anzahl von Faktoren miteinander multipliziert, während bei a^n die Anzahl der Faktoren selbst mit n anwächst. Dadurch wächst eine Exponentialfunktion langfristig wesentlich schneller als jede Potenz.

(2.23) Beispiel. Für $n = 10$ gilt

$$10^3 = 1000, \quad 2^{10} = 1024.$$

Für $n = 100$ erhalten wir dagegen

$$100^3 = 1\,000\,000, \quad 2^{100} \approx 1.27 \cdot 10^{30}.$$

Obwohl beide Folgen wachsen, ist die Exponentialfunktion für große Werte von n deutlich größer. ◁

Die Fakultät

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$$

wächst langsamer als

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{n\text{-mal}} = n^n.$$

Der Grund ist, dass in $n!$ die Faktoren unterschiedlich groß sind, während bei n^n alle n Faktoren den maximal möglichen Wert n besitzen.

(2.24) Beispiel. Für $n = 5$ gilt

$$5! = 120, \quad 5^5 = 3125.$$

Schon bei kleinen Werten ist n^n deutlich größer als $n!$. ◁

(2.25) *Bemerkung.* Für große Werte von n ergibt sich die folgende Reihenfolge der Wachstumsraten:

$$1 \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n.$$

Die Symbole $\ll$ sind hier nur informell zu verstehen und bedeuten „wächst wesentlich langsamer als“.

Bemerkung. Für Quotienten gilt die folgende Regel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{langsamer wachsende Folge}}{\text{schneller wachsende Folge}} = 0,$$

während

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{schneller wachsende Folge}}{\text{langsamer wachsende Folge}} = \infty.$$

Anschaulich bedeutet dies: Die schneller wachsende Folge dominiert das Verhalten des Quotienten für große Werte von n .

(2.26) Beispiel. Für den Quotienten einer Potenz und einer Exponentialfunktion gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3^n} = \frac{\text{langsamer}}{\text{schneller}} = 0.$$

Der Zähler wächst zwar ohne Schranke, der Nenner wächst jedoch wesentlich schneller. Deshalb wird der Quotient immer kleiner und nähert sich 0.

Wir betrachten außerdem den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{3^n + 1}.$$

In Zähler und Nenner dominiert jeweils der Term mit der höchsten Wachstumsrate. Da 3^n schneller wächst als 2^n , erwarten wir bereits, dass der Grenzwert 0 sein wird.

Dazu teilen wir Zähler und Nenner durch den schneller wachsenden Ausdruck 3^n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{3^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^n} (2^n + 1)}{\frac{1}{3^n} (3^n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}.$$

Da

$$0 < \frac{2}{3} < 1 \quad \text{und} \quad 0 < \frac{1}{3} < 1,$$

folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

Somit erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

Tag 3

Lineare Gleichungen und Geometrie

3.1 Geraden in $\mathbb{R}^2$

(3.1) **Definition.** Eine *Gerade* ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$ax + by = c$$

mit a, b nicht gleichzeitig 0. ◁

(3.2) **Beispiel.** a) Falls $b \neq 0$, so gilt

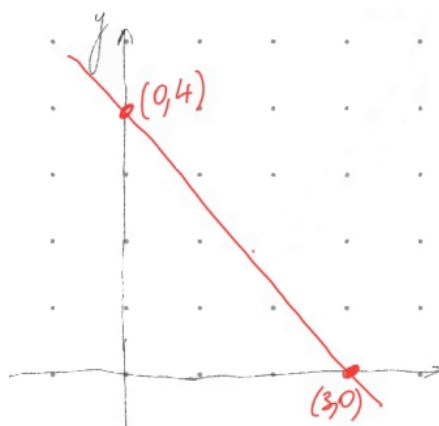
$$\begin{aligned} by &= c - ax, \\ y &= -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}. \end{aligned}$$

Dabei ist $-\frac{a}{b}$ die Steigung und $\frac{c}{b}$ der Schnittpunkt mit der y -Achse.

b) Wir wollen die Gerade mit der Gleichung

$$4x + 3y = 12$$

skizzieren.



Dafür bestimmen wir die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Für den Schnittpunkt mit der y -Achse setzen wir $x = 0$ ein. Es gilt

$$3y = 12 \quad \text{bzw.} \quad y = 4.$$

Für den Schnittpunkt mit der x -Achse setzen wir $y = 0$ ein. Wir berechnen

$$4x = 12 \quad \text{bzw.} \quad x = 3.$$

Die Gerade verläuft somit durch die Punkte $(0, 4)$ und $(3, 0)$. ◁

(3.3) *Bemerkung.* Die Gerade durch zwei Punkte (a_1, a_2) und (b_1, b_2) hat die Gleichung

$$(a_1 - b_1)(y - b_2) = (a_2 - b_2)(x - b_1).$$
◁

(3.4) Beispiel (Ohne Formel). Wir suchen die Gerade, die durch die Punkte

$$A = (0, 3), \quad B = (3, 0).$$

verläuft. Wir suchen somit a, b, c , sodass

$$A : \quad a \cdot 0 + b \cdot 3 = c \quad \implies \quad c = 3b,$$

$$B : \quad a \cdot 3 + b \cdot 0 = c \quad \implies \quad c = 3a.$$

Also gilt

$$a = b = \frac{1}{3}c,$$

wobei c beliebig ist.

Eine Gleichung der Geraden durch A und B wäre zum Beispiel

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = 1 \quad (c = 1),$$

oder

$$x + y = 3 \quad (c = 3),$$

oder

$$3x + 3y = 9 \quad (c = 9).$$

(Alle drei Gleichungen beschreiben dieselbe Gerade!) ◁

(3.5) Beispiel. Überprüfe, ob drei Punkte auf einer Geraden liegen.

a) $(2, 1)$, $(3, 0)$ und $(1, 2)$.

1) Die Gerade durch $(2, 1)$ und $(3, 0)$ hat die Gleichung

$$x + y = 3.$$

2) Teste, ob $(1,2)$ auf dieser Geraden liegt:

$$1 + 2 = 3. \quad \checkmark$$

Somit liegen die drei Punkte auf einer Geraden.

b) $A = (2,2)$, $B = (0,1)$ und $C = (-2,0)$.

Wir suchen a, b, c mit

$$\begin{cases} a \cdot 2 + b \cdot 2 = c & \implies 2a + 2b = c, \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 = c & \implies b = c, \\ a(-2) + b \cdot 0 = c & \implies c = -2a. \end{cases}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt

$$\begin{aligned} 2a + 2(-2a) &= -2a, \\ 2a - 4a &= -2a, \\ -2a &= -2a, \\ a &= -a. \end{aligned}$$

a beliebig, $b = c = -2a$.

Wir wählen, zum Beispiel, $a = 1$. Dann gilt $b = c = -2$, also

$$x - 2y = -2.$$

◁

3.2 Abstand

(3.6) Definition. Der *Abstand* zwischen zwei Punkten

$$A = (a_1, a_2), \quad B = (b_1, b_2).$$

ist gegeben durch

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

◁

(3.7) Beispiel. Für

$$A = (2, 1), \quad B = (3, 0)$$

gilt

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$$

◁

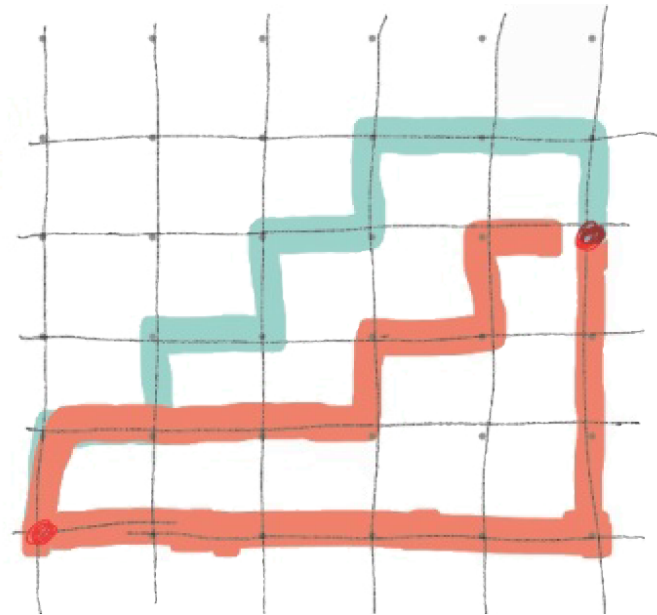
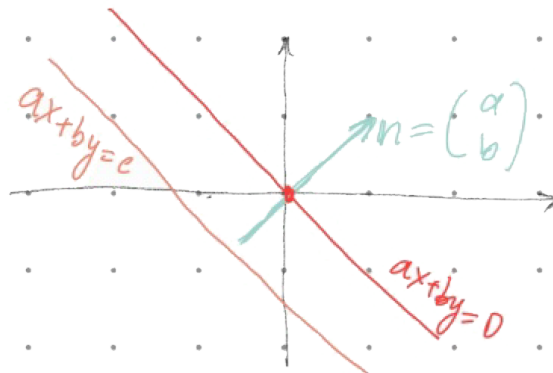


Abbildung 3.1: Der Minimalabstand zwischen zwei Kreuzungen in Manhattan oder Mannheim ist die Länge eines der roten Wege.

(3.8) Definition. a) Ein Vektor $\vec{n}$, der orthogonal zu der Geraden ℓ mit Gleichung

$$ax + by = c$$

ist, heißt ein *Normalenvektor* von ℓ .



b) Klar ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor der Geraden mit Gleichung $ax + by = c$ für jedes c .

c) Wir sagen, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *orthogonal* oder *senkrecht* sind, und schreiben $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, falls für das *Skalarprodukt* gilt

$$a \cdot x + b \cdot y = 0.$$

<

(3.9) Beispiel. a) Gesucht ist die Gerade mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ durch den Punkt $A = (4, 3)$.

Nach Definition (3.8) gilt für die Gerade G

$$G: x + 2y = c.$$

Um c zu bestimmen, setzen wir den Punkt A in diese Gleichung ein und berechnen

$$c = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 4 + 6 = 10.$$

Also ist

$$G: x + 2y = 10.$$

b) Die Geraden mit den Gleichungen

$$G_1: x + 2y = 1$$

und

$$G_2: 2x - y = 3$$

sind orthogonal, denn

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}_2$$

denn

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0.$$

<

(3.10) Beispiel. Bestimme die *Mittelsenkrechte* von

$$A = (3, 1) \quad \text{und} \quad B = (1, 5),$$

d. h. alle Punkte X , die den gleichen Abstand zu A und B haben.

Der Punkt $X = (x, y)$ liegt also genau dann auf der gesuchten Mittelsenkrechten, wenn

$$d(X, A) = d(X, B)$$

gilt, also

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2}.$$

Quadrieren liefert

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (y-1)^2 &= (x-1)^2 + (y-5)^2, \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25, \\ -4x + 8y &= 16, \\ -x + 2y &= 4. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ein Normalenvektor der Mittelsenkrechten von A und B . Wir bemerken, dass

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\vec{n},$$

also dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\vec{n}$ Vielfachen sind. ◁

3.3 Parameterdarstellung

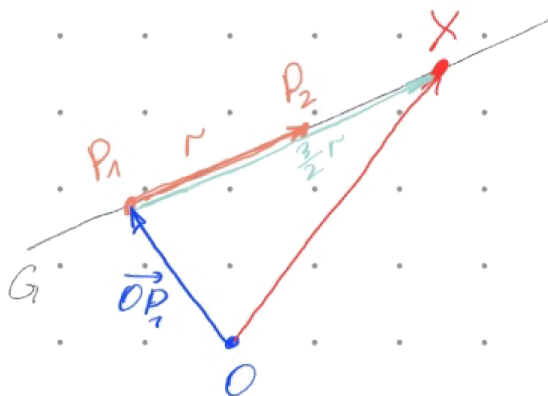
Seien

$$P_1 = (a_1, b_1), \quad P_2 = (a_2, b_2).$$

Für die Gerade G gilt

$$G \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ der Stützvektor und $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 - a_1 \\ b_2 - b_1 \end{pmatrix}$ der Richtungsvektor von G .



3.4 Raum $\mathbb{R}^3$

(3.11) **Definition.** Es seien zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren

a) Das *Skalarprodukt*:

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Insbesondere gilt

$$a \perp b \iff \langle a, b \rangle = 0.$$

b) Die Länge von a :

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

c) Das *Kreuzprodukt* bzw. *Vektorprodukt*:

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $a \times b$ steht senkrecht auf a und b .

Z.B. gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

◁

(3.12) Definition. Eine *Ebene* ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$ax + by + cz = d.$$

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein *Normalevektor* der Ebene.

Parameterdarstellung: Für die Ebene E gilt

$$E \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \cdot r + \overrightarrow{AC} \cdot s, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind A, B, C drei Punkte aus E , die nicht auf einer Geraden liegen.

◁

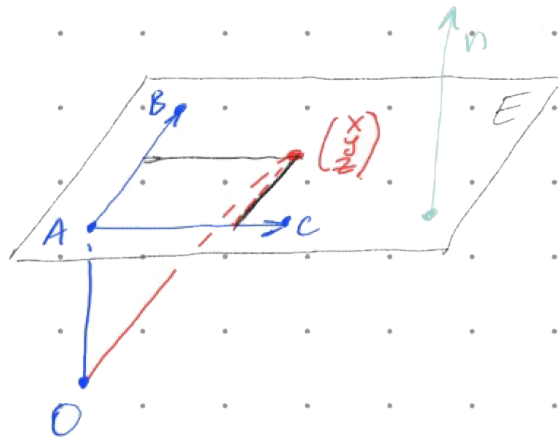
(3.13) Beispiel. Es seien

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (1, 1, 0), \quad C = (1, 1, 1).$$

Wir suchen die Ebene E durch A, B und C .

Eine Parameterdarstellung von E ist

$$E \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$



Ein Normalenvektor kann mit dem *Vektor-* oder *Kreuzprodukt* bestimmt werden

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinatengleichung der Ebene hat somit die Form

$$1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = d,$$

wobei wir d durch Einsetzen eines der Punkte bestimmen können. Da $A \in E$ gilt,

$$d = 1 \cdot 1 = 1.$$

Somit hat E die Gleichung

$$x = 1.$$

◁

(3.14) Beispiel. Bestimme die Schnittmenge der Ebenen mit Gleichungen

$$E_1: x - 2y + 2z = 1$$

und

$$E_2: 2x + y - z = 2.$$

Gesucht sind alle Punkte X mit

$$X \in E_1 \quad \text{und} \quad X \in E_2.$$

Dazu lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 1, \\ 2x + y - z &= 2. \end{aligned}$$

Addieren wir das Doppelte der zweiten Gleichung zur ersten Gleichung, so erhalten wir

$$5x = 5,$$

also

$$x = 1.$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$1 - 2y + 2z = 1 \implies y = z.$$

Damit ist

$$x = 1, \quad y = z, \quad z = t \text{ beliebig.}$$

Die Lösungsmenge ist somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R},$$

was gleichzeitig die Parameterdarstellung der gesuchten Geraden ist. $\triangleleft$

(3.15) *Bemerkung.* Für die gemeinsame Lage zweier Geraden in $\mathbb{R}^3$ gibt es drei Möglichkeiten:

- a) Sie sind parallel (d.h. die Richtungsvektoren sind Vielfachen).
- b) Sie schneiden sich.
- c) Sie sind *windschief*, d.h., keiner der beiden vorherigen Fälle liegt vor.

$\triangleleft$

(3.16) Beispiel. Es seien zwei Geraden gegeben:

$$G_1 \ni \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t \quad \text{und} \quad G_2 \ni \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

- a) Die Geraden sind nicht parallel, denn die Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sind keine Vielfachen.

b) Schneiden sich die Geraden?

Wir suchen Punkte, die auf beiden Geraden liegen, d.h. $s, t \in \mathbb{R}$, für die gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot s.$$

Dies ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 1 + t = s, \\ t = -1 + 2s, \\ 1 = 2 + 3s. \end{cases}$$

Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste Gleichung liefert

$$1 - 1 + 2s = s \implies s = 0.$$

Aus der dritten Gleichung folgt hingegen

$$s = -\frac{1}{3}.$$

Das Gleichungssystem hat somit keine Lösung. Also schneiden sich die Geraden nicht und sind daher windschief.

◁

(3.17) *Bemerkung.* Für den Winkel

$$\varphi = \angle AOB,$$

zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ gilt

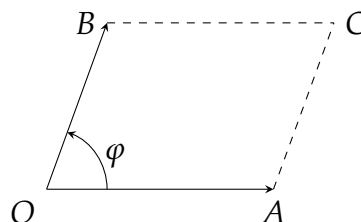
$$\cos \varphi = \frac{\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}.$$

◁

(3.18) **Beispiel.** Es seien

$$A = (0, 1, 0) \quad \text{und} \quad B = (0, 2, 3)$$

mit dem Winkel $\varphi = \angle AOB$.



Wir berechnen

$$\cos \varphi = \frac{2}{1 \cdot \sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} > 0,$$

insbesondere ist φ ein spitzer Winkel. (Siehe auch Tag 5.)

Die Fläche des Parallelogramms $OACB$ kann wie folgt berechnet werden:

$$F(OACB) = \|\vec{OA} \times \vec{OB}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 3.$$

◁

Tag 4

Quadratische Ergänzung

4.1 Reduktion zu linearen Gleichungen

(4.1) **Beispiel.** Die folgende quadratischen Gleichungen können im gewissen Sinne wie lineare behandelt werden.

a) Hier lösen wir einfach nach x^2 auf:

$$4x^2 = 16 \implies x^2 = \frac{16}{4} = 4 \implies x = \pm 2.$$

b) Hier ebenfalls:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2 &= x^2 + 2, \\ 2x^2 &= 4, \\ x^2 &= 2, \\ x &= \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

c) Die quadratische Gleichung

$$x(x + 3) = 0.$$

zerfällt in zwei lineare:

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x + 3 = 0.$$

Somit sind die Lösungen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -3.$$

d) Aus

$$(3x - 1)^2 = 4$$

folgt

$$3x - 1 = -2 \quad \text{oder} \quad 3x - 1 = 2.$$

Also

$$3x = -1 \quad \text{oder} \quad 3x = 3.$$

Somit sind die Lösungen

$$x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = 1.$$

◁

(4.2) *Bemerkung.* Jede Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

kann man immer in die Form

$$(x + d)^2 = e$$

bringen. Dieses Verfahren heißt *quadratische Ergänzung*.

◁

(4.3) Beispiel. a) Zuerst betrachten wir die Gleichung

$$x^2 - 6x + 3 = 0.$$

Für die quadratische Ergänzung schreiben wir $6x$ als $2 \cdot 3x$ und addieren und subtrahieren 3^2 :

$$\begin{aligned} (x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2) - 3^2 + 3 &= 0, \\ (x - 3)^2 - 9 + 3 &= 0, \\ (x - 3)^2 &= 6. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

verwendet. Aus $(x - 3)^2 = 6$ folgt nun

$$x - 3 = -\sqrt{6} \quad \text{oder} \quad x - 3 = \sqrt{6}.$$

Die Lösungen sind also

$$x_1 = 3 - \sqrt{6}, \quad x_2 = 3 + \sqrt{6}.$$

b) Für die Gleichung

$$x^2 + 10x + 30 = 0$$

gehen wir analog vor.

$$\begin{aligned} (x^2 + 2 \cdot 5x + 5^2) - 5^2 + 30 &= 0, \\ (x + 5)^2 - 25 + 30 &= 0, \\ (x + 5)^2 &= -5. \end{aligned}$$

Dabei wurde die binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

verwendet. Dies ist ein Widerspruch. Die Gleichung hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

c) Auch für die Gleichung

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$$

gehen wir genauso vor. Wir bemerken, dass $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}x$ ist, also müssen wir $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ addieren und subtrahieren.

$$\begin{aligned} \left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{4} &= 0, \\ \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{12}{16} &= 0, \\ \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 &= \frac{13}{16}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$x + \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{13}}{4} \quad \text{oder} \quad x + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Die Lösungen sind

$$x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}, \quad x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

d) Als letztes wenden wir quadratische Ergänzung auf die allgemeine Form

$$x^2 + px + q = 0$$

an, um die bekannte pq -Formel zu beweisen. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \left(x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0, \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Beziehungsweise

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

4.2 Kreise

(4.4) Definition. Ein Kreis mit Mittelpunkt

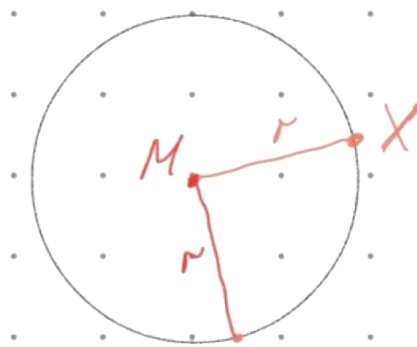
$$M = (m, u)$$

und Radius $r \geq 0$ ist die Menge aller Punkte

$$X = (x, y),$$

die den Abstand r zu M haben, d. h.

$$d(X, M) = r.$$



Es gilt

$$d(X, M) = \sqrt{(x - m)^2 + (y - u)^2} = r.$$

Somit lautet die Kreisgleichung

$$(x - m)^2 + (y - u)^2 = r^2.$$

◁

(4.5) Beispiel. Wir suchen die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $M = (2, 3)$ vom Radius $r = 4$. Es gilt

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2.$$

oder nach Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 16 &= 0, \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

◁

(4.6) *Bemerkung.* Im Allgemeinen kann jede Kreisgleichung in der Form

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

geschrieben werden.

Allerdings nicht jede Gleichung dieser Form beschreibt einen Kreis! $\triangleleft$

(4.7) **Beispiel.** Wir untersuchen, ob die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$$

einen Kreis beschreibt. Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned} (x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) - 2^2 + (y^2 - 2 \cdot 3y + 3^2) - 3^2 + 13 &= 0, \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 4 - 9 + 13 &= 0, \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Somit besteht die Lösungsmenge dieser Gleichung aus einem einzigen Punkt

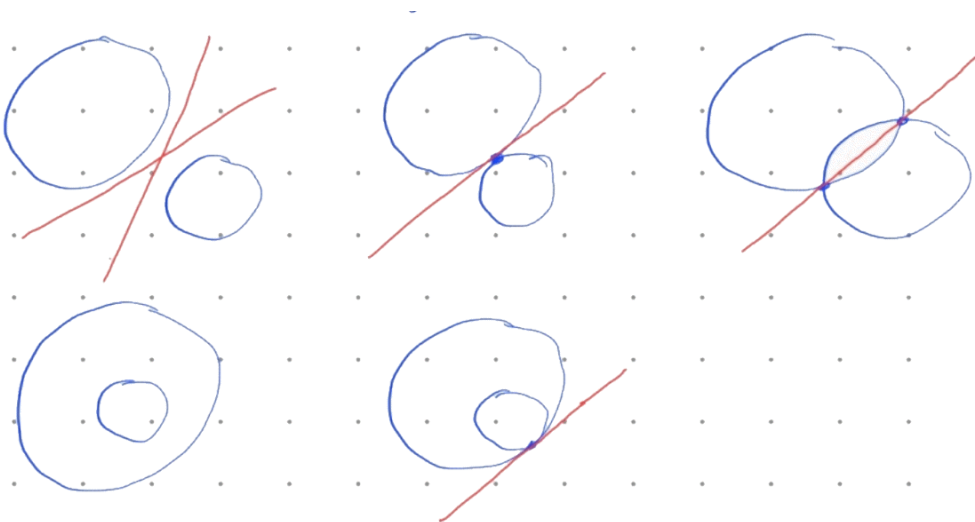
$$\{(2, 3)\}.$$

Überprüfen Sie selbst, dass z.B. die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 14 = 0$$

keine Lösungen hat. $\triangleleft$

(4.8) **Beispiel** (Schnittmenge zweier Kreise). Für die gemeinsame Lage zweier Kreise in $\mathbb{R}^2$ gibt es eine der fünf Möglichkeiten.



Für dieses Beispiel betrachten wir zwei Kreise gegeben durch ihre Gleichungen:

$$K_1: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0,$$

$$K_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0.$$

Wir suchen alle Punkte

$$X = (x, y),$$

die beide Gleichungen erfüllen.

- I) Wir bemerken, dass die Punkte, die die beiden Kreisgleichungen K_1 und K_2 erfüllen, erfüllen auch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5.$$

Aus dieser folgt nach Kürzen

$$\begin{aligned} 6x - 2y + 6 &= 0, \\ -2y &= -6x - 6, \\ y &= 3x + 3. \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden!

- II) Durch Rückeinsetzen in K_1 erhalten wir die x -Komponenten der Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kreis K_1 :

$$\begin{aligned} x^2 + (3x + 3)^2 + 2x - 6(3x + 3) + 1 &= 0, \\ x^2 + 9x^2 + 18x + 9 + 2x - 18x - 18 + 1 &= 0, \\ 10x^2 + 2x - 8 &= 0, \\ x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{4}{5} &= 0. \end{aligned}$$

Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{10}x + \left(\frac{1}{10} \right)^2 \right) - \left(\frac{1}{10} \right)^2 - \frac{4}{5} &= 0, \\ \left(x + \frac{1}{10} \right)^2 - \frac{1}{100} - \frac{4}{5} &= 0, \\ \left(x + \frac{1}{10} \right)^2 &= \frac{81}{100}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$x + \frac{1}{10} = \pm \frac{9}{10},$$

also

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{4}{5}.$$

- III) Einsetzen in die Geradengleichung liefert

$$y_1 = 3 \cdot (-1) + 3 = 0$$

und

$$y_2 = 3 \cdot \frac{4}{5} + 3 = \frac{12}{5} + \frac{15}{5} = \frac{27}{5}.$$

Somit besteht die Schnittmenge der beiden Kreise aus zwei Punkten

$$K_1 \cap K_2 = \left\{ (-1, 0), \left(\frac{4}{5}, \frac{27}{5} \right) \right\}.$$

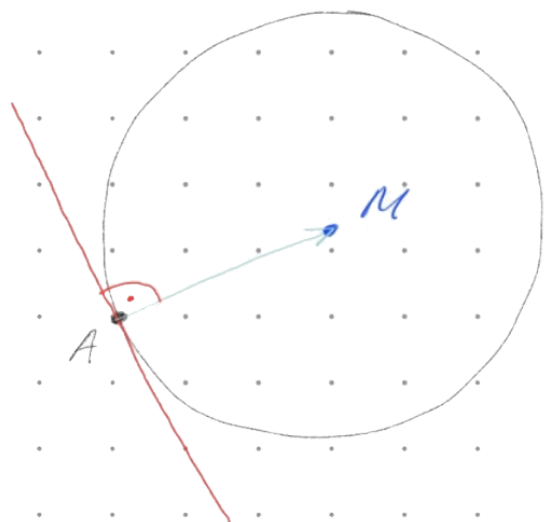
◁

(4.9) Beispiel. Wir suchen die (Gleichung der) Tangente T an den Kreis

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0$$

durch den Punkt

$$A = (-1, 0).$$



I) Zuerst bestimmen wir den Mittelpunkt des Kreises. Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 &= 0, \\ (x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) - 2^2 + (y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2) - 2^2 - 5 &= 0, \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 &= 13. \end{aligned}$$

Also ist

$$M = (2, 2).$$

II) Die Tangente T ist senkrecht zu

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

und es gilt $A \in T$.

Die Gleichung von T hat daher die Form

$$3x + 2y = c.$$

Da $A \in T$ gilt, folgt

$$c = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -3.$$

Somit lautet die Tangentengleichung

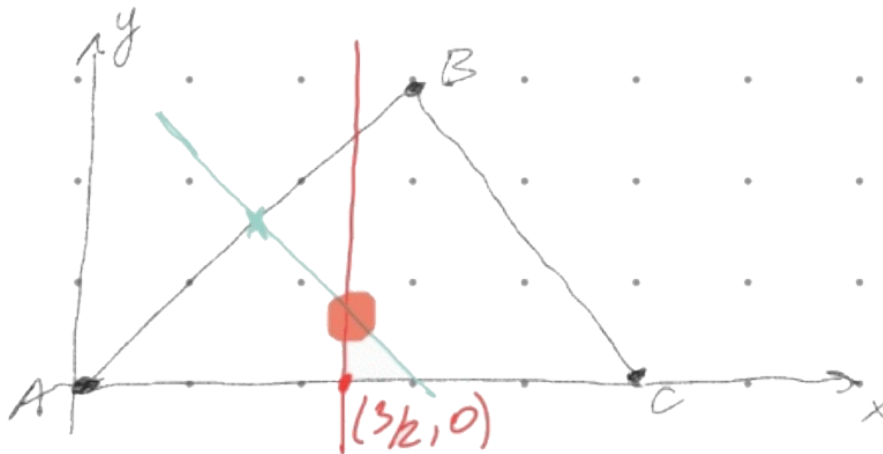
$$T: 3x + 2y = -3.$$

◁

(4.10) Beispiel (Umkreis eines Dreiecks). Gegeben sei das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Ecken

$$A = (0,0), \quad B = (2,2), \quad C = (3,0).$$

Wir suchen die Gleichung des Umkreises.



- a) Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks. Die Mittelsenkrechte G_1 von A und C hat die Gleichung

$$G_1: x = \frac{3}{2}.$$

Die Mittelsenkrechte G_2 von A und B geht durch den Mittelpunkt $(1,1)$ und ist senkrecht zu

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Daher ist ihre Gleichung

$$G_2: 2x + 2y = 4$$

oder äquivalent

$$G_2: x + y = 2.$$

Für den Schnittpunkt von G_1 und G_2 gilt

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Somit ist

$$y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

und der Mittelpunkt des Umkreises ist

$$M = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

b) Der Radius ist

$$r = \|\vec{AM}\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

c) Die Kreisgleichung lautet somit

$$\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

◁

4.3 Graph einer quadratischen Funktion

Gesucht ist der Graph von

$$y = x^2 + px + q.$$

Der Graph von

$$y = (x - d)^2 + e$$

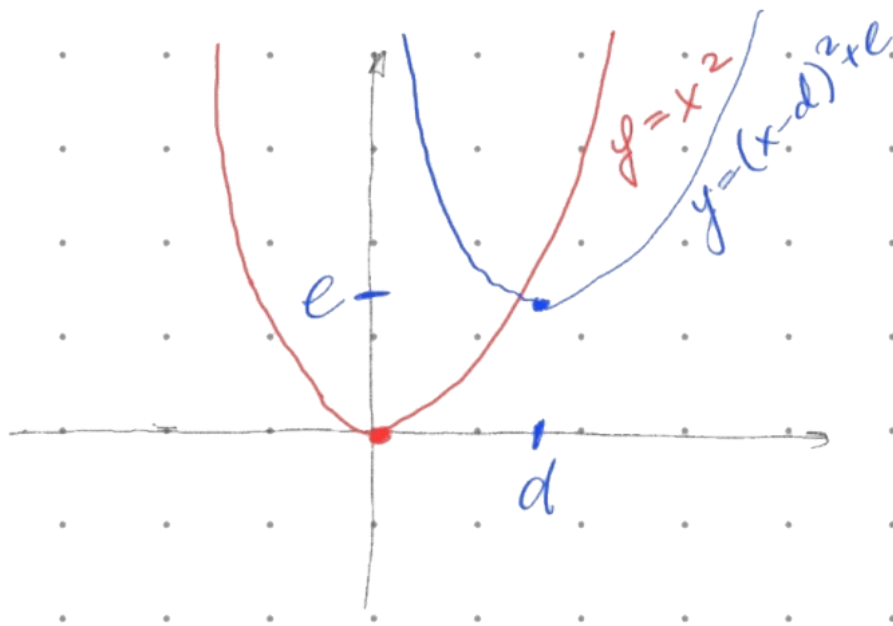
ist der Graph von $y = x^2$ (eine nach oben geöffnete Parabel), der um d nach rechts und um e nach oben verschoben wurde.

Im Allgemeinen ist der Graph von

$$y = f(x - d) + e$$

der um d nach rechts und um e nach oben verschobene Graph von

$$y = f(x).$$



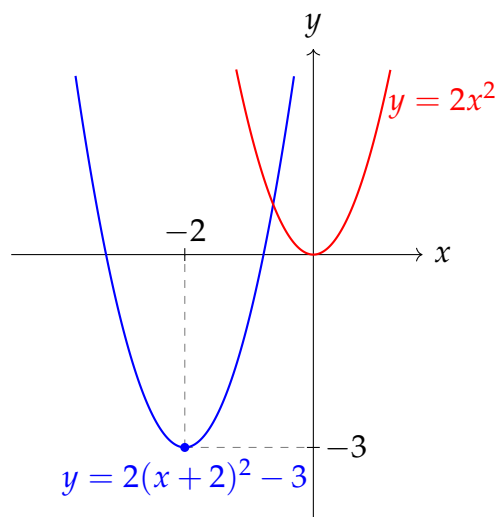
(4.11) **Beispiel.** a) Skizziere den Graphen von

$$y = 2x^2 + 8x + 5.$$

Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned} y &= 2 \left[x^2 + 4x + 4 - 4 + \frac{5}{2} \right] \\ &= 2 \left[(x+2)^2 - \frac{3}{2} \right] \\ &= 2(x+2)^2 - 3, \end{aligned}$$

also erhalten wir eine um 2 nach links und um 3 nach unten verschobene Version von $y = x^2$:



b) Wir wollen den Graphen von

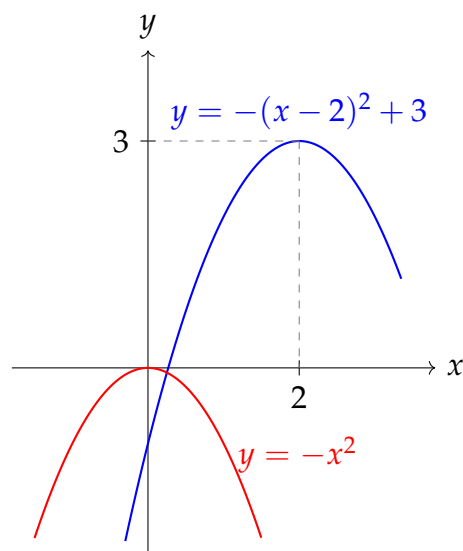
$$y = -x^2 + 4x - 1$$

skizzieren.

Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned} y &= -[x^2 - 4x + 1] \\ &= -[x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + 1] \\ &= -[(x - 2)^2 - 3] \\ &= -(x - 2)^2 + 3, \end{aligned}$$

also erhalten wir eine um 2 nach rechts und um 3 nach oben verschobene Version von $y = -x^2$:

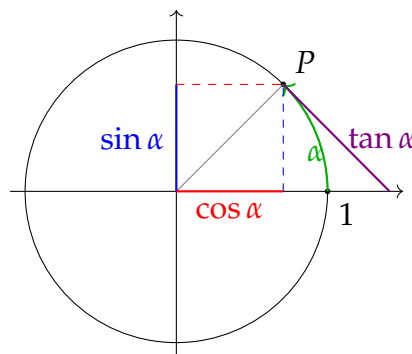


Tag 5

Trigonometrie

5.1 Definition am Einheitskreis und am Dreieck

(5.1) **Definition** (am Einheitskreis und am rechtwinkligen Dreieck). a) Sei ein Punkt $P = (x, y)$ auf dem Einheitskreis gegeben. Der Winkel α (in Radiant) ist die Länge des Kreisbogens zwischen den Punkten $1 = (1, 0)$ und $P = (x, y)$ (gegen den Uhrzeigersinn).



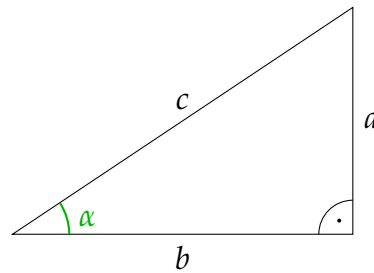
Dann definieren wir

$$\cos \alpha := x, \quad \sin \alpha := y, \quad \tan \alpha := \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}.$$

Wegen der Symmetrie gilt

$$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right), \quad \sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

b) Sei ein rechtwinkliges Dreieck gegeben.



Dann definieren wir

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}.$$

◁

(5.2) *Bemerkung.* Aus den beiden Definitionen in (5.1) folgt direkt der „trigonometrische Pythagoras“

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

◁

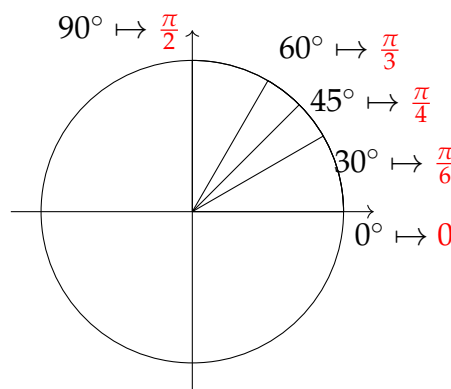
(5.3) *Bemerkung* (Winkelmaß). Da der Umfang des Einheitskreises gleich 2π ist, werden Winkel als Bruchteile von 2π angegeben.

Die Babylonier haben das Gradmaß eingeführt, indem sie $2\pi = 360^\circ$ gesetzt haben. Dies ergibt die folgende Wechselformel zwischen Bogenmaß und Gradmaß:

$$\text{Bogenmaß} = \frac{2\pi \cdot \text{Gradmaß}}{360^\circ}, \quad \text{Gradmaß} = \frac{\text{Bogenmaß} \cdot 360^\circ}{2\pi},$$

zum Beispiel,

$$60^\circ \mapsto \frac{2\pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, \quad 45^\circ \mapsto \frac{2\pi \cdot 45^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$



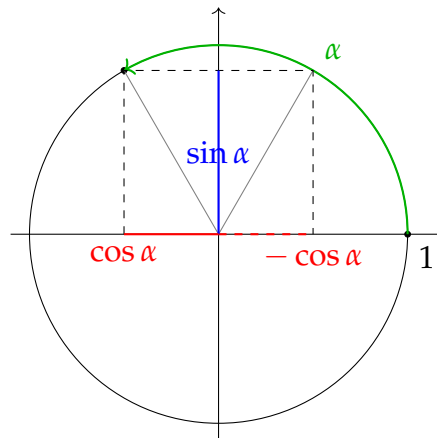
◁

(5.4) Beispiel. Die folgenden Werte sollte man sich merken:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Die Werte in den anderen Quadranten berechnet man dann, indem man zurück zum ersten Quadranten führt. Zum Beispiel gilt

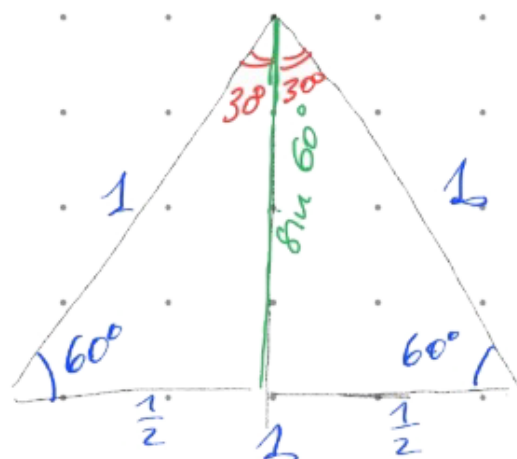
$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



◁

(5.5) Beispiel. Wir beweisen, dass $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aus einem gleichseitigem Dreieck folgern wir (mit der Definition von cos)



$$\cos 60^\circ = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2},$$

$$\sin 60^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 60^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

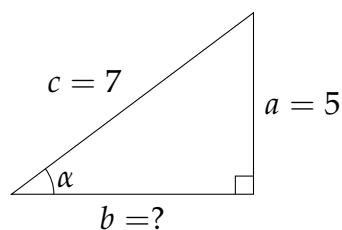
◁

(5.6) Beispiel. Es sei

$$\sin \alpha = \frac{5}{7}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Berechne $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$.

Wir machen eine Hilfskonstruktion von einem rechtwinkligen Dreieck mit Winkel α :



Mit Pythagoras finden wir

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{49 - 25} = \sqrt{24} = \sqrt{3 \cdot 8} = 2\sqrt{6}.$$

Daraus folgt

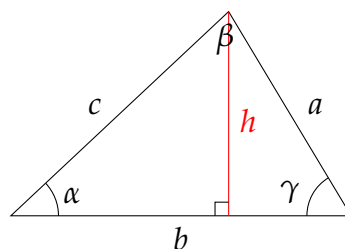
$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{6}}{7},$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}.$$

◁

5.2 Dreiecksgeometrie

Es sei ein allgemeines Dreieck mit Seiten a, b, c , Winkeln α, β, γ und der Höhe h (auf die Seite b) gegeben.



Die Winkelsumme ist immer π :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Aus der Definition von Sinus folgt

$$h = c \sin \alpha = a \sin \gamma.$$

Der *Sinussatz* besagt

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

und der *Cosinussatz* besagt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Schlussendlich kann die Fläche F des Dreieck wie folgt berechnet werden:

$$F = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ba \sin \gamma.$$

(5.7) Beispiel. Es sei ein Dreieck gegeben mit

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \quad a = 1, \quad c = 2.$$

Finde alle Seiten und Winkel des Dreiecks.

a) Mit dem Sinussatz gilt

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{c}{\sin \gamma}, \\ \sin \gamma &= \frac{c \sin \alpha}{a} = \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{6} \right)}{1} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\gamma = \frac{\pi}{2}.$$

b) Den dritten Winkel finden wir einfach als

$$\beta = \pi - \alpha - \gamma = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

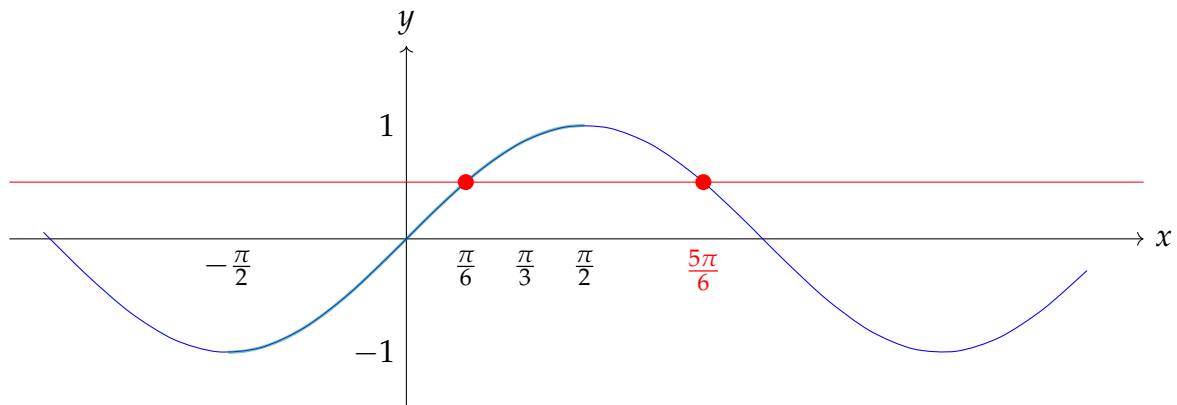
c) Die dritte Seite kann zum Beispiel mit Pythagoras berechnet werden (da $\gamma = \frac{\pi}{2}$)

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

5.3 Trigonometrische Gleichungen

(5.8) **Beispiel.** Wir bestimmen alle Lösungen von

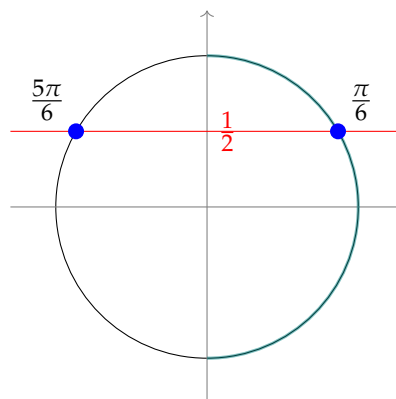
$$\sin x = \frac{1}{2}.$$



Es gibt klar unendliche viele Lösungen, die sich wegen der 2π -Periodizität von $\sin$ wiederholen.

a) Die Lösungen von $\sin x = \frac{1}{2}$ für $0 \leq x \leq 2\pi$ sind

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \quad \text{und} \quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$



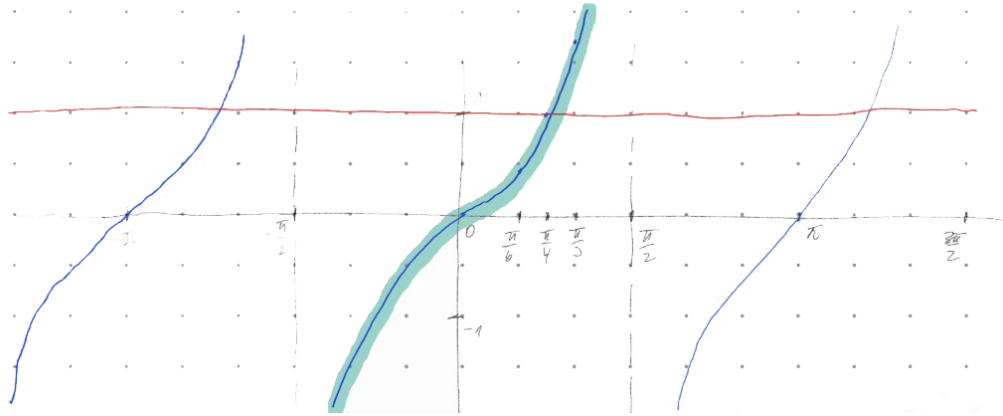
b) Alle Lösungen sind

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Wir bemerken, dass die Gleichung $\sin x = a$ eine eindeutige Lösung für $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ und $-1 \leq a \leq 1$ hat. $\triangleleft$

(5.9) **Beispiel.** Wir bestimmen alle Lösungen von

$$\tan x = 1.$$



a) Es gibt eine eindeutige Lösung für

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

und zwar

$$\tan x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4},$$

b) Wegen der π -Periodizität von $\tan$ sind alle Lösungen nun

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

◁

5.4 Arcus-Funktionen

(5.10) **Beispiel.** Gilt

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

so schreiben wir auch

$$x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right).$$

Analog schreiben wir

$$x = \arctan(1),$$

wenn

$$\tan x = 1 \quad \text{und} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

bzw.

$$x = \arccos(y),$$

wenn

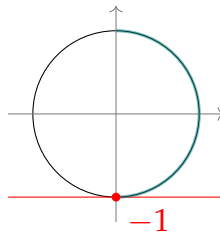
$$\cos x = y \quad \text{und} \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

◁

(5.11) Beispiel. a) Wir berechnen $\arcsin(-1)$, d.h. wir suchen ein

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{mit} \quad \sin x = -1.$$

Wir überzeugen uns leicht mit einem Einheitskreis,



dass $x = -\frac{\pi}{2}$ ist. Also gilt

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

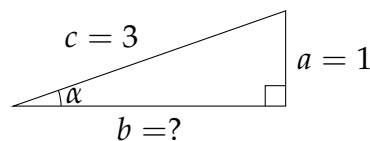
b) Wir wollen nun

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

exakt berechnen.

Sei $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$, d.h. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Gesucht ist $\cos \alpha$.

Eine ähnliche Aufgabe haben wir im Beispiel (5.6) gelöst. Wir konstruieren ein Hilfsdreieck



und finden mit Pythagoras

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Somit ist

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

◁

Tag 6

Wurzeln, Exponentialfunktion und Logarithmus

6.1 Potenzen und Wurzeln

(6.1) **Definition.** Für $a \neq 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^k = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{k\text{-mal}}.$$

Außerdem setzt man

$$a^0 = 1, \quad 1^k = 1$$

und definiert negative Exponenten durch

$$a^{-k} = \left(a^k\right)^{-1} = \frac{1}{a^k} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{k\text{-mal}}}.$$

Dabei heißt a die *Grundzahl* und k der *Exponent*. ◁

(6.2) *Bemerkung* (Rechenregeln). Für Grundzahlen a, b und Exponenten m, n gelten die Potenzgesetze

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m}, \\ \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m}, \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m}, \\ (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}. \end{aligned}$$

◁

(6.3) Definition. Die *quadratische* oder *zweite Wurzel* aus einer Zahl $a \geq 0$ ist diejenige Zahl w , für die

$$w \geq 0 \quad \text{und} \quad w^2 = a$$

gilt. Man schreibt

$$w = \sqrt{a}.$$

◁

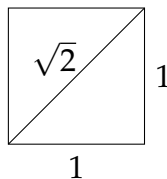
(6.4) Beispiel. a) $\sqrt{2}$ ist die eindeutige Zahl mit den Eigenschaften

$$\sqrt{2} > 0 \quad \text{und} \quad (\sqrt{2})^2 = 2.$$

Die Zahl $\sqrt{2}$ besitzt die Dezimalentwicklung

$$\sqrt{2} \approx 1,41 \dots$$

Geometrisch ist $\sqrt{2}$ die Länge der Diagonalen eines Quadrats mit Seitenlänge 1:



b) Die Gleichung

$$x^2 = 4$$

hat die beiden Lösungen

$$x = 2 \quad \text{und} \quad x = -2.$$

Dagegen bezeichnet die Wurzel stets die nichtnegative Lösung:

$$\sqrt{4} = 2.$$

c) Quadratische Faktoren können aus der Wurzel gezogen werden:

$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

d) Es gilt

$$\sqrt{21} = \sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich nicht weiter vereinfachen.

e) Für Quotienten gilt

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

- f) Um eine Wurzel im Nenner zu beseitigen, erweitert man mit einer geeigneten Wurzel:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{11}{15}} &= \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{11 \cdot 15}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} \\ &= \frac{\sqrt{11 \cdot 15}}{15} = \frac{1}{15} \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 11}.\end{aligned}$$

<

(6.5) Definition. Die n -te Wurzel aus a ist die Zahl w mit

$$w^n = a.$$

Man schreibt

$$w = \sqrt[n]{a}.$$

Für gerades n muss $a \geq 0$ sein; dann gilt auch $w \geq 0$.

<

(6.6) Beispiel. a) Es gilt

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}.$$

- b) Um keine Wurzel im Nenner zu erhalten, erweitert man den Radikanden so, dass im Nenner vollständige dritte Potenzen entstehen:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{14}{15}} &= \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 7 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 5^2}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{3^3 \cdot 5^3}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}}{\sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \sqrt[3]{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{1}{15} \sqrt[3]{3150}.\end{aligned}$$

Dies ist die Normalform ohne Wurzel im Nenner.

<

(6.7) Definition (Potenzen mit rationalen Exponenten). Für $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ und $a > 0$ gilt

$$a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}.$$

Dabei gelten dieselben Rechenregeln für Potenzen wie zuvor, siehe Bemerkung (6.2).

<

(6.8) Beispiel. a) Es gilt

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

b) Es gilt

$$a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}.$$

c) Es gilt

$$7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3} = \sqrt{7^2 \cdot 7} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}.$$

Alternativ kann man den Exponenten zerlegen:

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Damit folgt mit den Rechenregeln

$$7^{\frac{3}{2}} = 7^{1+\frac{1}{2}} = 7^1 \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7\sqrt{7}.$$

d) Es gilt

$$2^{\frac{5}{3}} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}.$$

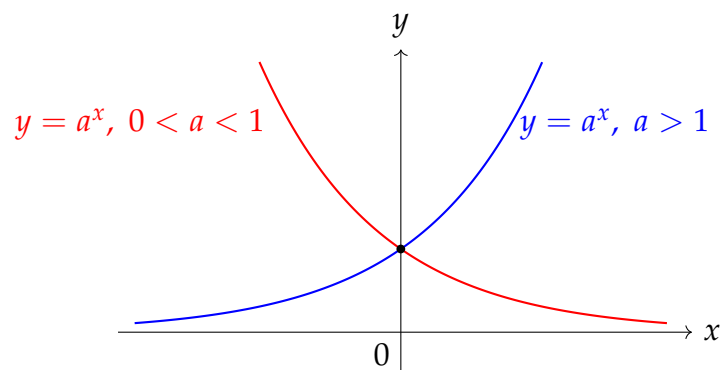
◁

6.2 Exponentialfunktion

(6.9) **Definition.** Für $a > 0$ heißt die Funktion

$$f(x) = a^x$$

Exponentialfunktion zur Basis a .



Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$

- wächst für $a > 1$,
- fällt für $0 < a < 1$.

◁

(6.10) **Beispiel.** a) Es gilt

$$\begin{aligned} (2^3)^5 \cdot (2^5)^3 &= 2^{3 \cdot 5} \cdot 2^{5 \cdot 3} = 2^{15} \cdot 2^{15} = 2^{15+15} = 2^{30} \\ &= (2^{10})^3 = 1024^3 \approx 1 \cdot 10^9. \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\left(2^{3-2x}\right)^4 = 2^{4(3-2x)} = 2^{12-8x} = 2^{12} \cdot 2^{-8x} = 2^{12} \left(2^{-8}\right)^x.$$

c) Wir skizzieren den Graphen der Funktion

$$f(x) = 2^{1-x}.$$

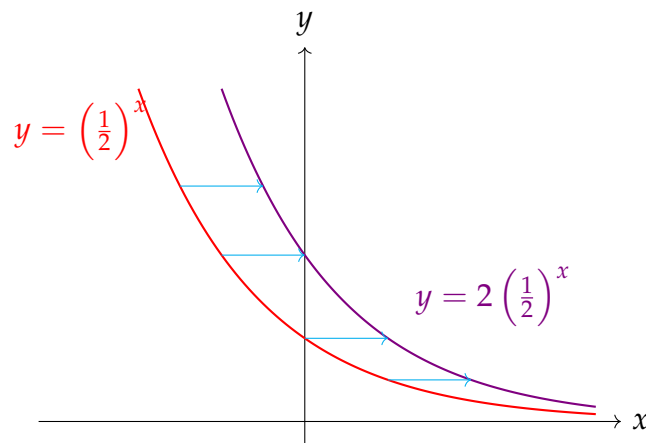
Zunächst gilt

$$f(x) = 2^{1-x} = 2^{-(x-1)} = \left(2^{-1}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}.$$

Der Graph von $y = f(x)$ entsteht aus dem Graphen von

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

durch eine Verschiebung um 1 nach rechts.



Alternativ kann man schreiben

$$f(x) = 2^{1-x} = \frac{2^1}{2^x} = 2 \cdot \frac{1}{2^x} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Somit, kann man den Graphen von $y = f(x)$ als eine Streckung von $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ um 2 betrachten.

◁

6.3 Logarithmen

(6.11) **Definition.** Für $a > 0$ und $a \neq 1$ ist der Logarithmus zur Basis a durch

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

definiert. Die Funktion

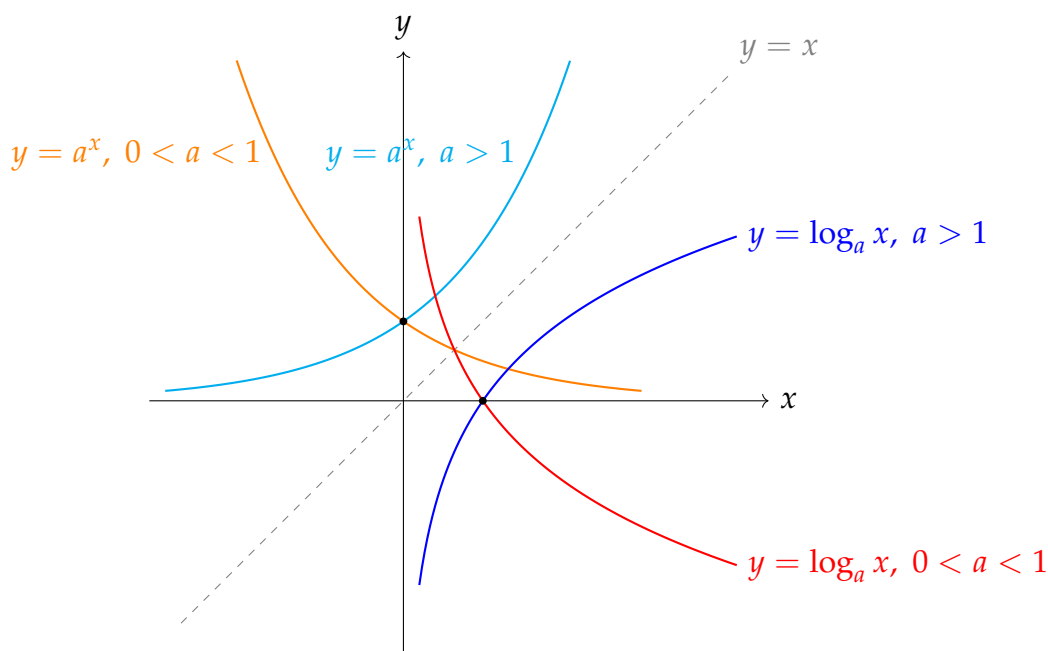
$$f(x) = \log_a x$$

heißt *Logarithmusfunktion zur Grundzahl* beziehungsweise zur *Basis* a . Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$. Insbesondere gilt

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{für jedes } x > 0$$

und

$$\log_a (a^y) = y \quad \text{für jedes } y \in \mathbb{R}.$$



Die Graphen der Exponentialfunktion und der zugehörigen Logarithmusfunktion sind Spiegelbilder an der Geraden $y = x$. ◁

(6.12) *Bemerkung* (Eigenschaften der Logarithmen). Für jede $x, y > 0, p \in \mathbb{R}$ gilt

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a (x^p) = p \cdot \log_a x.$$

Zusätzlich gilt für alle $x > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0$ und $b \neq 1$ die „Basiswechselregel“

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

◁

(6.13) Beispiel. a) Es gilt

$$\log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = -1,$$

denn

$$2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

b) Es gilt

$$\log_2 \left(\frac{1}{4} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{2^2} \right) = \log_2 (2^{-2}) = -2 \log_2 2 = -2.$$

c) Gesucht ist

$$\log_4 8.$$

Aus

$$4^r = 8$$

folgt zunächst

$$1 < r < 2.$$

Mit der Basiswechselregel erhält man

$$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}.$$

Zur Probe gilt

$$4^{1+\frac{1}{2}} = 4 \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8.$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned} \log_5 8 + \log_5 4 &= \log_5 (8 \cdot 4) \\ &= \log_5 32 = \log_5 (2^5) = 5 \log_5 2. \end{aligned}$$

e) Wir skizzieren den Graphen der Funktion

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{x} \right).$$

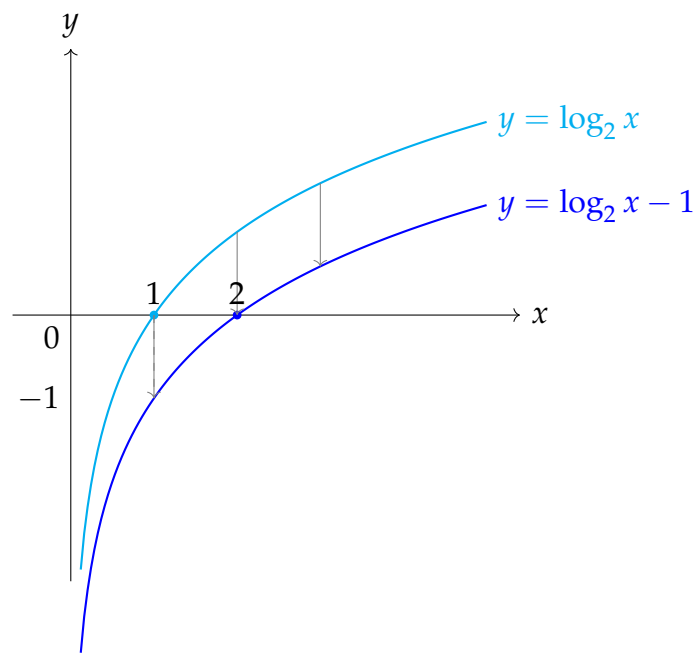
Mit der Basiswechselregel gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{x} \right) = \frac{\log_2 \left(\frac{2}{x} \right)}{\log_2 \left(\frac{1}{2} \right)} = -\log_2 \left(\frac{2}{x} \right) \\ &= -(\log_2 2 - \log_2 x) = -1 + \log_2 x \end{aligned}$$

Der Graph von $y = f(x)$ entsteht also aus dem Graphen von

$$y = \log_2 x$$

durch eine Verschiebung um 1 nach unten.



Tag 7

Ableitungen und Kurvendiskussion

In diesem Kapitel werden zunächst die wichtigsten Ableitungsregeln und Standardableitungen wiederholt. Anschließend betrachten wir höhere Ableitungen, die Differenzierbarkeit von Funktionen sowie den Zusammenhang zwischen der Ableitung und den Monotonieintervallen einer Funktion.

7.1 Rechenregeln und Standardableitungen

(7.1) *Bemerkung* (Ableitungsregeln). Für differenzierbare Funktionen f und g sowie eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Ableitungsregeln:

$$\begin{aligned}(c \cdot f(x))' &= c \cdot f'(x), \\ (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x), \\ (f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x), \\ (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.\end{aligned}$$

Die dritte Regel heißt *Kettenregel*, die vierte Regel *Produktregel* und die fünfte — *Quotientenregel*. ◁

(7.2) *Bemerkung.* Die wichtigsten Standardableitungen sind:

$f(x)$	$f'(x)$	
x^p	$p \cdot x^{p-1}$	für jedes p
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$
e^x	e^x	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Dabei ist die Eulersche Konstante $e \approx 2,71 \dots$ definiert als die eindeutige Grundzahl $a > 1$ mit $(a^x)' = a^x$. D.h. insbesondere, dass die Steigung der Tangente an den Graphen von $y = e^x$ an dem Punkt $(0,1)$ genau 1 ist. Ferner definiert man den *natürlichen* Logarithmus

$$\ln x := \log_e x.$$

Es gilt insbesondere

$$\ln e = \log_e e = 1.$$

◁

(7.3) Beispiel. a) Es gilt

$$\begin{aligned} (x^4 - 3x^2 + 2)' &= (x^4)' - 3(x^2)' + 2(1)' \\ &= 4x^3 - 3 \cdot 2x + 2 \cdot 0 \\ &= 4x^3 - 6x. \end{aligned}$$

b) Mithilfe der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned} \left((x^3 - 1)^5 \right)' &= 5(x^3 - 1)^4 \cdot 3x^2 \\ &= 15x^2 (x^3 - 1)^4. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$f(u) = u^5, \quad g(x) = x^3 - 1,$$

also

$$f'(u) = 5u^4 \quad \text{und} \quad g'(x) = 3x^2.$$

c) Erneut mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \left(\sin(x^2 + 1) \right)' &= \cos(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)' \\ &= \cos(x^2 + 1) \cdot 2x. \end{aligned}$$

d) Für

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$$

gilt

$$f(x) = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = x^{-\frac{4}{3}}.$$

Damit folgt mit der Ableitung der Potenzfunktion

$$f'(x) = -\frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}-1} = -\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}} = -\frac{4}{3} \frac{1}{x^{\frac{7}{3}}} = -\frac{4}{3} \frac{1}{x^2 \sqrt[3]{x}}.$$

◁

7.2 Höhere Ableitungen

Ist die Ableitung f' selbst wieder differenzierbar, so kann sie erneut abgeleitet werden. Die dadurch entstehenden Funktionen heißen *höhere Ableitungen*:

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(4)} = (f''')', \quad \dots$$

(7.4) Beispiel. a) Für

$$f(x) = e^x$$

gilt

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f'''(x) = e^x, \quad f^{(4)}(x) = e^x.$$

Somit ist jede Ableitung von f wieder gleich f .

b) Für

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \cdot x^{-2} = -x^{-2}, \\ f''(x) &= -(-2)x^{-3} = 2x^{-3}, \\ f'''(x) &= 2 \cdot (-3)x^{-4} = -6x^{-4}. \end{aligned}$$

c) Für

$$f(x) = \cos x$$

gilt

$$f'(x) = -\sin x,$$

$$f''(x) = -\cos x,$$

$$f'''(x) = \sin x,$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x.$$

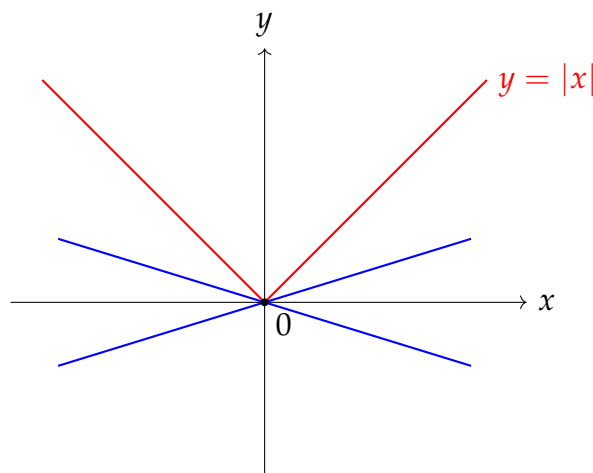
Danach wiederholen sich die Ableitungen periodisch.

◁

7.3 Differenzierbarkeit

Die Zahl $f'(a)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen von $y = f(x)$ im Punkt mit der x -Koordinate a .

Falls die Tangente nicht existiert, weil der Graph beispielsweise an dieser Stelle nicht glatt ist oder die Tangente senkrecht steht, so ist f im Punkt a nicht differenzierbar.



(7.5) Beispiel. a) Die Betragsfunktion kann stückweise geschrieben werden als

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Die linksseitige und die rechtsseitige Steigung im Punkt $x = 0$ stimmen nicht überein. Daher existiert $f'(0)$ nicht.

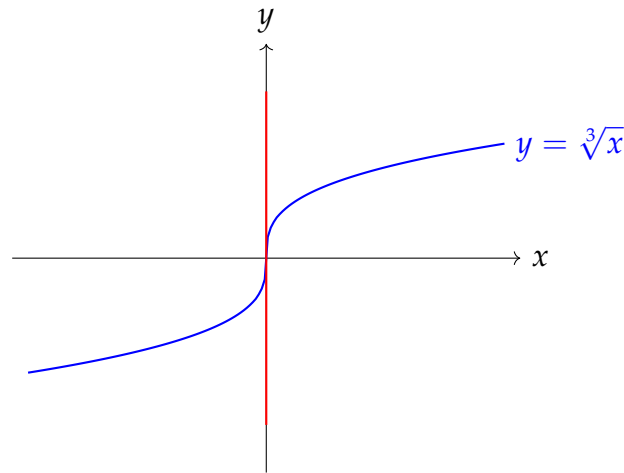
b) Für

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

gilt für $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Im Punkt $x = 0$ besitzt der Graph eine senkrechte Tangente. Daher existiert $f'(0)$ nicht.



◁

7.4 Intervalle der Monotonie

(7.6) Definition. Eine Funktion f heißt auf einem Intervall I

a) *monoton wachsend*, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

Die Funktion heißt *streng monoton wachsend*, falls sogar

$$f(x_1) < f(x_2)$$

gilt.

b) *monoton fallend*, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Die Funktion heißt *streng monoton fallend*, falls sogar

$$f(x_1) > f(x_2)$$

gilt.



(7.7) Satz. Sei f auf dem Intervall I differenzierbar. Dann gilt:

- a) Die Funktion f ist genau dann monoton wachsend auf I , wenn

$$f'(x) \geq 0$$

für alle $x \in I$ gilt.

Außerdem folgt aus

$$f'(x) > 0$$

für alle $x \in I$, dass f streng monoton wachsend auf I ist.

- b) Die Funktion f ist genau dann monoton fallend auf I , wenn

$$f'(x) \leq 0$$

für alle $x \in I$ gilt.

Außerdem folgt aus

$$f'(x) < 0$$

für alle $x \in I$, dass f streng monoton fallend auf I ist.

(7.8) Bemerkung (Kurvendiskussion). Was in der Schule als Kurvendiskussion benannt wurde, ist im Wesentlichen die Bestimmung der Monotonieintervalle einer differenzierbaren Funktion f . Man geht folgendermaßen vor:

- Bestimme die Ableitung f' .
- Löse die Gleichung $f'(x) = 0$.
- Ergänze gegebenenfalls Stellen, an denen f oder f' nicht definiert ist.
- Teile den Definitionsbereich an diesen Stellen in Intervalle.
- Bestimme das Vorzeichen von f' auf jedem Intervall.
- Schließe aus dem Vorzeichen von f' auf die Monotonie von f .

Kennt man die Intervalle der Monotonie von f , so kennt man auch die (lokalen) Minima und Maxima von f . ◁

(7.9) Beispiel. Bestimme die Monotonieintervalle der Funktion

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4$$

und skizziere ihren Graphen.

Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 \\ &= 4x^3 - 12x^2 \\ &= 4x^2(x - 3). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$f'(x) = 0 \iff 4x^2(x - 3) = 0.$$

Die kritischen Stellen sind folglich

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = 3.$$

Die Vorzeichen von f' und das Monotonieverhalten von f können in einer Vorzeichentabelle zusammengefasst werden:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\searrow$	-23	$\nearrow$

Somit ist f auf

$$(-\infty, 0) \quad \text{und} \quad (0, 3)$$

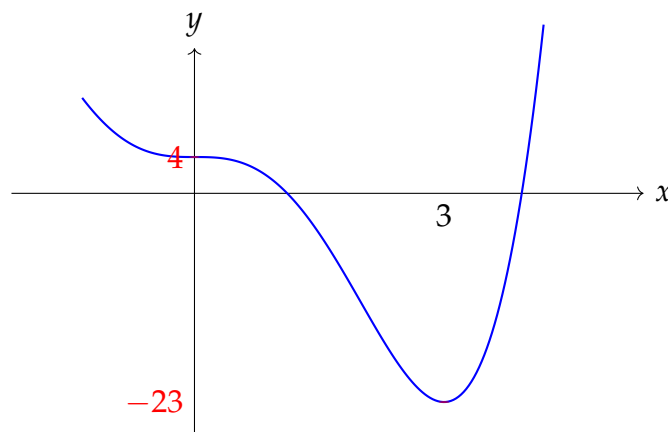
streng monoton fallend und auf

$$(3, \infty)$$

streng monoton wachsend.

An der Stelle $x = 0$ wechselt das Vorzeichen von f' nicht. Daher besitzt f dort weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum. An der Stelle $x = 3$ wechselt f' von negativ zu positiv. Somit besitzt f dort ein lokales Minimum mit

$$f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 4 = -23.$$



(7.10) Beispiel. Bestimme die Monotonieintervalle der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}.$$

Der Definitionsbereich ist

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Mit der Quotientenregel erhält man

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Für ein Polynom der Form

$$x^2 + px + q$$

mit den Nullstellen x_1 und x_2 gilt nach dem Satz von Vieta

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Die Nullstellen des Zählers von f' erhält man aus

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 &= 0, \\ x^2 + 2x + 1 - 1 - 1 &= 0, \\ (x+1)^2 - 2 &= 0, \\ (x+1)^2 &= 2. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$x + 1 = -\sqrt{2} \quad \text{oder} \quad x + 1 = \sqrt{2}.$$

Somit sind

$$x_1 = -1 - \sqrt{2} \quad \text{und} \quad x_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

Also gilt

$$f'(x) = \frac{\left(x - (-1 - \sqrt{2})\right) \left(x - (-1 + \sqrt{2})\right)}{(x+1)^2}.$$

Neben den Nullstellen der Ableitung muss die Definitionslücke

$$x = -1$$

berücksichtigt werden. Die Vorzeichentabelle lautet:

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	$(x_1, -1)$	-1	$(-1, x_2)$	x_2	(x_2, ∞)
$f'(x)$	+	0	-	$\frac{1}{2}$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$-2(1 + \sqrt{2})$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$2(\sqrt{2} - 1)$	$\nearrow$

Die Funktion besitzt ein lokales Maximum bei

$$x = -1 - \sqrt{2}$$

mit dem Funktionswert

$$f(-1 - \sqrt{2}) = -2(1 + \sqrt{2}).$$

Sie besitzt ein lokales Minimum bei

$$x = -1 + \sqrt{2}$$

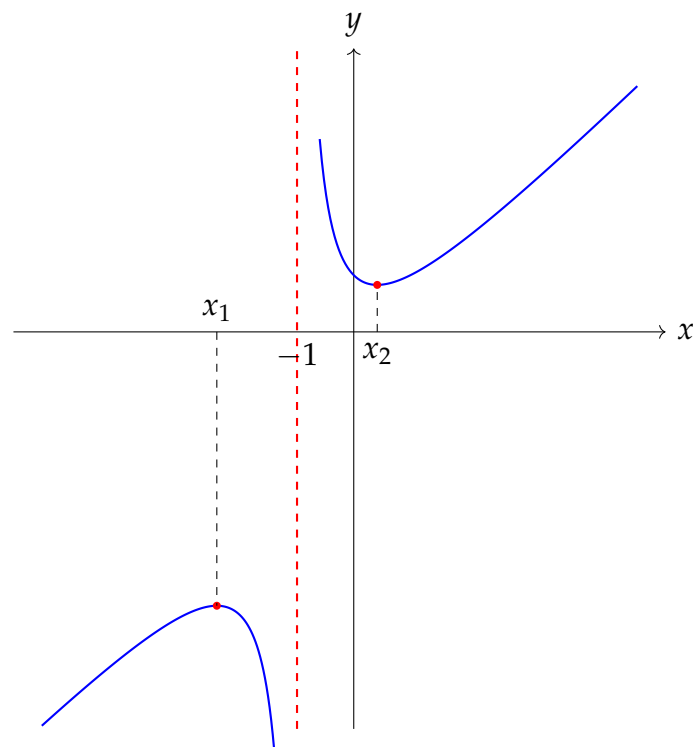
mit dem Funktionswert

$$f(-1 + \sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Die Gerade

$$x = -1$$

ist eine senkrechte Asymptote.



7.5 Globale Minima und Maxima

Bei der Bestimmung globaler Minima und Maxima auf einem abgeschlossenen Intervall müssen neben den *kritischen* Stellen (die Nullstellen der Ableitung plus die Punkte, in denen die Funktion nicht differenzierbar ist) im Inneren des Intervalls auch die Randpunkte untersucht werden.

(7.11) Beispiel. Bestimme das globale Minimum und das globale Maximum der Funktion

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

auf dem Intervall

$$I = [-2, 2].$$

Da

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1),$$

gilt

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \text{ oder } x \geq 1, \\ -(x^2 - 1), & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Daher ist

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < -1 \text{ oder } x > 1, \\ -2x, & -1 < x < 1. \end{cases}$$

Die Ableitungen $f'(-1)$ und $f'(1)$ existieren nicht. Die Stellen $x = -1$ und $x = 1$ müssen dennoch als mögliche Extremstellen berücksichtigt werden. Im Inneren des Intervalls gilt

$$f'(x) = 0$$

nur für

$$x = 0.$$

Zusammen mit den Randpunkten und den nicht differenzierbaren Stellen müssen daher die Punkte

$$-2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2$$

untersucht werden. Es gilt

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	0	1	0	3

Die Monotonie kann durch folgende Tabelle beschrieben werden:

x	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2
$f'(x)$		$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3

Somit ist das globale Maximum

$$\max_{x \in [-2, 2]} f(x) = 3$$

und wird bei

$$x = -2 \quad \text{und} \quad x = 2$$

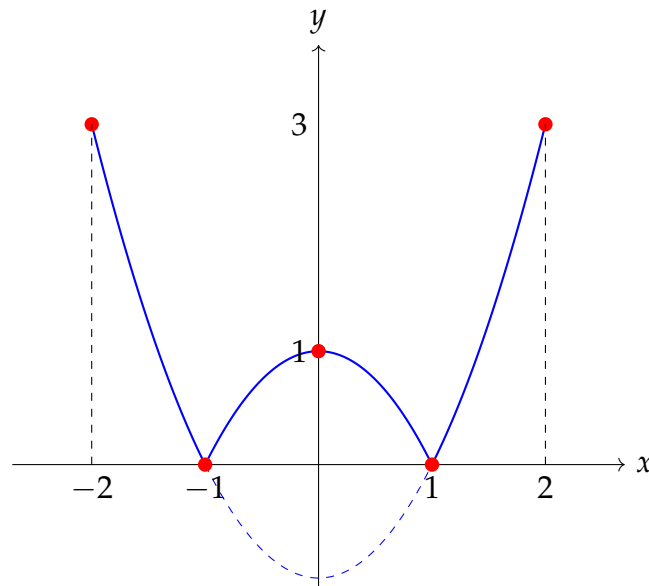
angenommen. Das globale Minimum ist

$$\min_{x \in [-2, 2]} f(x) = 0$$

und wird bei

$$x = -1 \quad \text{und} \quad x = 1$$

angenommen.



◁

Tag 8

Integrieren und Integrationstechniken

In diesem Kapitel werden bestimmte und unbestimmte Integrale sowie grundlegende Integrationstechniken behandelt. Dazu gehören die Substitutionsregel und die partielle Integration. Abschließend wird die Berechnung von Flächen zwischen Funktionsgraphen betrachtet.

8.1 Stammfunktionen und bestimmte Integrale

(8.1) **Definition.** Ist

$$F'(x) = f(x)$$

für alle x aus einem Intervall $I = [a, b]$, so heißt F eine *Stammfunktion* von f .

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Für die rechte Seite verwendet man auch die Kurzschreibweise

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

◁

(8.2) *Bemerkung.* Ist F eine Stammfunktion von f , so ist für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ auch

$$G(x) = F(x) + c$$

eine Stammfunktion von f , denn

$$G'(x) = F'(x) = f(x).$$

◁

(8.3) *Bemerkung.* Die wichtigsten Stammfunktionen sind:

$f(x)$	eine Stammfunktion $F(x)$	
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln x+a $	
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$a > 0, a \neq 1$
e^x	e^x	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$a \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$	$ x < a, a > 0$

◁

(8.4) *Bemerkung* (Rechenregeln).

Für integrierbare Funktionen f und g , eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ sowie geeignete Integrationsgrenzen gelten:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b c f(x) \, dx &= c \int_a^b f(x) \, dx, \\
 \int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx, \\
 \int_a^b f(cx) \, dx &= \frac{1}{c} F(x) \Big|_{ca}^{cb} = \frac{1}{c} (F(ca) - F(cb)), \\
 \int_b^a f(x) \, dx &= - \int_a^b f(x) \, dx, \\
 \int_a^c f(x) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx.
 \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\left(\int_a^x f(t) \, dt \right)' = f(x)$$

und

$$\left(\int_x^b f(t) \, dt \right)' = -f(x).$$

◁

(8.5) *Bemerkung.* Die Integrationsvariable in einem bestimmten Integral ist eine sogenannte *Dummy-Variable*. Sie kann durch jeden anderen Buchstaben ersetzt werden:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f(u) \, du.$$

Dies ist vergleichbar mit einem Summationsindex:

$$\sum_{i=0}^n f(i) = \sum_{k=0}^n f(k) = \sum_{j=0}^n f(j).$$

<

(8.6) Beispiel. a) Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x^4 - 5x^3 - 1) \, dx &= \int_0^2 x^4 \, dx - 5 \int_0^2 x^3 \, dx - \int_0^2 1 \, dx \\ &= \left. \frac{x^5}{5} \right|_0^2 - 5 \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 - x \Big|_0^2 \\ &= \left(\frac{32}{5} - 0 \right) - 5 \left(\frac{16}{4} - 0 \right) - (2 - 0) \\ &= \frac{32}{5} - 20 - 2 = \frac{32 - 110}{5} = -\frac{78}{5}. \end{aligned}$$

b) Wir berechnen

$$\int_{-1}^1 (x - e^{-x}) \, dx.$$

Da

$$(-e^{-x})' = e^{-x},$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x - e^{-x}) \, dx &= \int_{-1}^1 x \, dx - \int_{-1}^1 e^{-x} \, dx \\ &= \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^1 - (-e^{-x}) \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - (-e^{-1} + e) = \frac{1}{e} - e. \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\int_0^1 \cos(\pi x) \, dx = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi} (\sin \pi - \sin 0) = 0.$$

<

8.2 Unbestimmte Integrale

(8.7) Definition. Ist F eine Stammfunktion von f , so bezeichnet

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

die Menge aller Stammfunktionen von f . Dieser Ausdruck heißt *unbestimmtes Integral*. ◁

(8.8) Beispiel. a) Es gilt

$$\int x^5 \, dx = \frac{x^6}{6} + c.$$

b) Wir berechnen

$$\int \cos^2 x \, dx.$$

Zuerst lösen wir die Verdopplungsformel für den Cosinus

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

nach $\cos^2 x$ auf:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int 1 \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + c. \end{aligned}$$

◁

8.3 Substitutionsregel

Die Substitutionsregel ist die Umkehrung der Kettenregel. Ist $F' = f$, so gilt

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) \, dx = F(g(x)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Mit der Substitution

$$u = g(x), \quad du = g'(x) \, dx$$

kann man dies auch in der Form

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du = F(u) \Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

schreiben.

Die Formel folgt aus der Kettenregel:

$$\left(F(g(x)) \right)' = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x).$$

(8.9) Beispiel. a) Wir berechnen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{\sin x} dx.$$

Wenn wir

$$f(x) = e^x \text{ und } g(x) = \sin x$$

setzen, mit der Stammfunktion $F(x) = e^x$ von $f(x) = e^x$, dann gilt es

$$\left(F(g(x)) \right)' = \left(e^{\sin x} \right)' = \cos x e^{\sin x}.$$

Damit folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{\sin x} dx = F \Big|_{g(0)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\sin \frac{\pi}{2}} - e^{\sin 0} = e^1 - e^0 = e.$$

b) Oft kann man die Stammfunktion der Verkettung nicht direkt erkennen. Dann muss man wirklich substituieren. Wir benutzen für die Substitution dann die kurzehand Notation wie in dem folgenden Beispiel.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sqrt{x+1} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x+1 \mid x=0 \rightarrow u=1 \\ du = dx \mid x=3 \rightarrow u=4 \end{array} \right] = \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 \\ &= \frac{2}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

c) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos x \mid x = -\frac{\pi}{4} \rightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ du = -\sin x dx \mid x = \frac{\pi}{3} \rightarrow u = \frac{1}{2} \end{array} \right] \\ &= - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u} du = - \ln |u| \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} = - \left(\ln \left(\frac{1}{2} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \\ &= \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

d) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_2^4 (2x-5)^5 dx &= \left[\begin{array}{l} u = 2x-5 \mid x=2 \rightarrow u=-1 \\ du = 2 dx \mid x=4 \rightarrow u=3 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_{-1}^3 u^5 du = \frac{1}{2} \frac{u^6}{6} \Big|_{-1}^3 \\ &= \frac{1}{12} \left(3^6 - (-1)^6 \right) = \frac{1}{12} (729 - 1) = \frac{728}{12} = \frac{182}{3}. \end{aligned}$$

◁

8.4 Partielle Integration

Die partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel. Es gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx.$$

Mit

$$df = f'(x) \, dx \quad \text{und} \quad dg = g'(x) \, dx$$

kann die Formel auch kurzehend als

$$\int f \, dg = fg - \int g \, df$$

geschrieben werden.

Bei der Wahl von f und g' sollte darauf geachtet werden, dass sich f leicht ableiten und g' leicht integrieren lässt.

(8.10) Beispiel. a) Wir berechnen

$$\int_1^2 x^3 \ln x \, dx.$$

Die Wahl

$$f(x) = x^3, \quad g'(x) = \ln x$$

ins ungünstig, da wir die Stammfunktion von $\ln x$ nicht kennen. Daher wählen wir stattdessen

$$f(x) = \ln x, \quad g'(x) = x^3.$$

Dann gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^4}{4}.$$

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^3 \ln x \, dx &= \ln x \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^4 \ln x}{4} \Big|_1^2 - \frac{1}{4} \int_1^2 x^3 \, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} \Big|_1^2 - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{16 \ln 2}{4} - \frac{\ln 1}{4} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right) = 4 \ln 2 - \frac{15}{16}. \end{aligned}$$

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^x \, dx &= \left[\begin{array}{l} f = e^x \rightarrow du = e^x \, dx \\ dg = dx \rightarrow v = x \end{array} \right] = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx \\ &= x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = (e - 0) - (e - 1) = 1. \end{aligned}$$

c) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \sin x \, dx &= \left[\begin{array}{l} f = x \quad \rightarrow \quad du = dx \\ dg = \sin x \, dx \rightarrow v = -\cos x \end{array} \right] \\ &= -x \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) \, dx = -x \cos x \Big|_0^\pi + \sin x \Big|_0^\pi \\ &= -\pi \cos \pi - 0 + \sin \pi - \sin 0 = \pi.\end{aligned}$$

◁

8.5 Flächen unter Funktionsgraphen

Ist eine Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ nichtnegativ, so ist die Fläche zwischen dem Graphen von f , der x -Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ gegeben durch

$$A = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Wechselt f auf dem Intervall das Vorzeichen, so muss das Intervall an den Nullstellen von f aufgeteilt werden. Für die geometrische Fläche gilt allgemein

$$A = \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

(8.11) Beispiel. Wir bestimme die Fläche zwischen dem Graphen

$$y = \cos x$$

und der x -Achse für

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi.$$

Die Funktion $\cos x$ besitzt im betrachteten Intervall die Nullstelle

$$x = \frac{\pi}{2}.$$

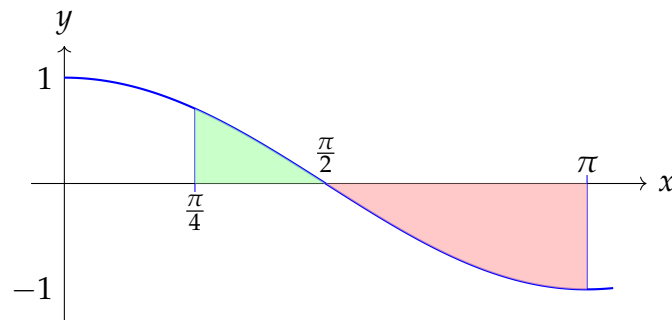
Auf

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$$

ist $\cos x \geq 0$, während auf

$$\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

die Ungleichung $\cos x \leq 0$ gilt.



Die Fläche des ersten Teilstücks ist

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Für das zweite Teilstück muss der Betrag des Integrals genommen werden:

$$\begin{aligned} A_2 &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx \right| = \left| \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right| \\ &= \left| \sin \pi - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = |0 - 1| = 1. \end{aligned}$$

Damit beträgt die gesamte Fläche

$$A = A_1 + A_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Im Gegensatz dazu ist das bestimmte Integral über das gesamte Intervall

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Das bestimmte Integral ist somit eine orientierte Fläche, bei der Flächenstücke unterhalb der x -Achse negativ gezählt werden. $\triangleleft$

8.6 Flächen zwischen zwei Funktionsgraphen

Sind f und g stetige Funktionen und gilt

$$f(x) \geq g(x)$$

für alle $x \in [a, b]$, so ist die Fläche zwischen den Graphen von f und g gegeben durch

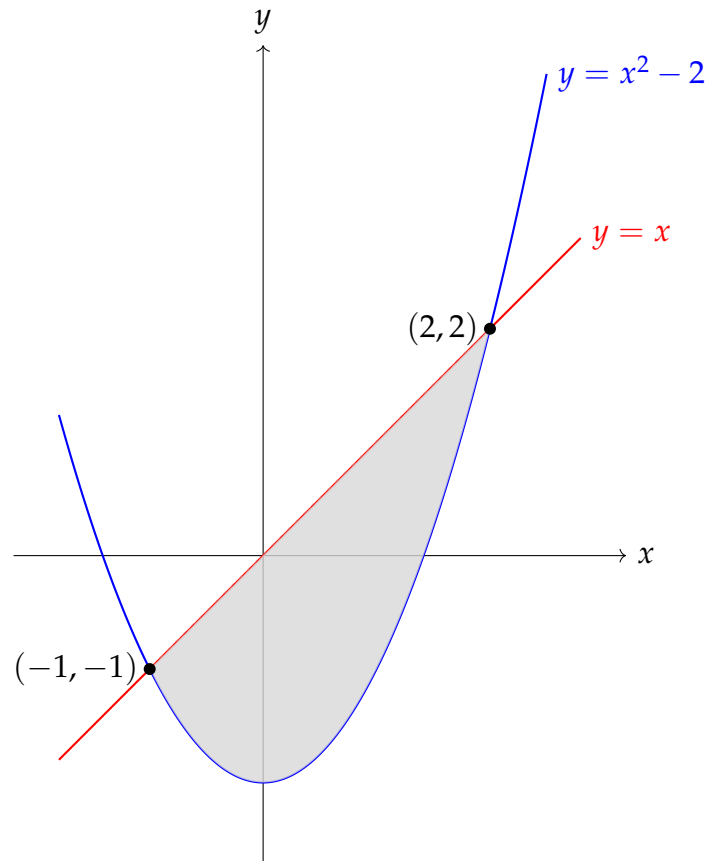
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

Im Allgemeinen gilt

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$

(8.12) Beispiel. Wir bestimmen die Fläche zwischen den Graphen

$$y = x^2 - 2 \quad \text{und} \quad y = x.$$



Zunächst bestimmen wir die Schnittpunkte der beiden Graphen:

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &= x, \\ x^2 - x - 2 &= 0, \\ (x + 1)(x - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Somit sind die Schnittstellen

$$x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 2.$$

Der Graph von

$$f(x) = x$$

liegt auf dem Intervall $[-1, 2]$ oberhalb des Graphen von

$$g(x) = x^2 - 2.$$

Daher gilt

$$f(x) - g(x) \geq 0$$

für alle $x \in [-1, 2]$.

Die gesuchte Fläche ist somit

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_{-1}^2 (x - x^2 + 2) \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 + 2x \Big|_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} \right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) + 2(2 - (-1)) \\ &= \left(2 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right) + 6 = \frac{3}{2} - 3 + 6 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

◁

Tag 9

Beweise und Kombinatorik

In diesem Kapitel werden grundlegende Beweismethoden sowie erste Prinzipien der Kombinatorik behandelt. Beweise treten unter anderem in der Geometrie, bei Rechenregeln, Konvergenzaussagen, Identitäten, in der Stochastik, der Logik und der Mengenlehre auf. Besonders wichtig sind Aussagen über natürliche Zahlen.

Ein typisches Beispiel für eine solche Aussage lautet:

$n^2 - 1$ ist für jede ungerade Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar.

9.1 Gegenbeispiele

Soll eine allgemeine Aussage widerlegt werden, so genügt es, ein einziges Gegenbeispiel zu finden.

(9.1) Beispiel. a) Betrachte die Behauptung:

Alle geraden Zahlen größer als 2 sind durch 4 teilbar.

Diese Behauptung ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist

6,

denn 6 ist gerade und größer als 2, aber nicht durch 4 teilbar.

b) Betrachte die Behauptung:

Es gibt keine eierlegenden Säugetiere.

Diese Behauptung ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist das Schnabeltier.

c) Betrachte die Behauptung:

Alle Primzahlen sind ungerade.

Diese Behauptung ist falsch, denn die Zahl

$$2$$

ist eine gerade Primzahl.

Die veränderte Behauptung

Alle Primzahlen außer 2 sind ungerade

ist dagegen wahr.

◁

9.2 Vollständige Induktion

Mit der vollständigen Induktion können Aussagen der Form

$$A(n)$$

für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden.

Ein Induktionsbeweis besteht aus drei Schritten:

- IA) *Induktionsanfang*: Man überprüft die Aussage für den ersten Wert, meistens $n = 1$.
- IV) *Induktionsvoraussetzung*: Man nimmt an, dass die Aussage für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- IS) *Induktionsschritt*: Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung zeigt man, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt.

(9.2) Beispiel. Wir beweisen mit Induktion, dass

$$n^2 + n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gerade ist.

◁

Beweis. IA) Für $n = 1$ gilt

$$1^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Die Zahl 2 ist gerade. Somit gilt die Aussage für $n = 1$.

IV) Es gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$n^2 + n$$

gerade ist.

IS) $n \mapsto n + 1$. Zu zeigen ist, dass auch

$$(n + 1)^2 + (n + 1)$$

gerade ist. Es gilt

$$\begin{aligned}(n + 1)^2 + (n + 1) &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\ &= n^2 + n + 2n + 2 \\ &= (n^2 + n) + 2(n + 1).\end{aligned}$$

Der erste Summand ist nach der Induktionsvoraussetzung gerade. Der zweite Summand ist als Vielfaches von 2 ebenfalls gerade. Daher ist auch ihre Summe gerade.

Somit ist $n^2 + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gerade. □

(9.3) Beispiel. Wir beweisen die Formel des kleinen Gauß, vgl. Tag 2:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

mit Induktion. ◁

Beweis. IA) Für $n = 1$ gilt auf der linken Seite

$$\sum_{i=1}^1 i = 1.$$

Auf der rechten Seite gilt

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

Somit gilt die Aussage für $n = 1$.

IV) Es gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

IS) $n \mapsto n + 1$. Zu zeigen ist

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} i &= 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \\
 &= \sum_{i=1}^n i + (n+1) \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
 &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
 \end{aligned}$$

Damit gilt die Formel auch für $n+1$.

□

9.3 Widerspruchsbeweis

Bei einem Widerspruchsbeweis nimmt man zunächst an, dass die zu beweisende Aussage falsch ist. Anschließend zeigt man, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Daher muss die ursprüngliche Aussage wahr sein.

(9.4) Beispiel. Wir beweisen, dass alle Primzahlen größer als 2 ungerade sind. ◁

Beweis. Wir nehmen im Widerspruch zur Behauptung an, es gäbe eine gerade Primzahl $p > 2$.

Da p gerade ist, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$p = 2k.$$

Wegen $p > 2$ gilt

$$1 < k < p.$$

Damit sind sowohl 2 als auch k echte Teiler von p . Dies steht im Widerspruch zu der Annahme, dass p eine Primzahl ist.

Folglich sind alle Primzahlen größer als 2 ungerade.

□

9.4 Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit dem systematischen Abzählen von Möglichkeiten.

(9.5) Beispiel. Wie viele Spiele gibt es in einer Saison der Fußball-Bundesliga, wenn 18 Mannschaften teilnehmen und jede Mannschaft zweimal gegen jede andere Mannschaft spielt?

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Anzahl der Spiele zu bestimmen.

a) Pro Spieltag finden

$$\frac{18}{2} = 9$$

Spiele statt. Jede Mannschaft spielt gegen 17 Gegner jeweils zweimal. Daher gibt es

$$2 \cdot (18 - 1) = 2 \cdot 17 = 34$$

Spieltage. Somit beträgt die Anzahl der Spiele

$$9 \cdot 34 = 306.$$

b) Da jede der 18 Mannschaften mit allen 17 Gegnern spielt, erhält man

$$18 \cdot 17 = 306$$

Spiele. Dabei wurde jedes Paar der Mannschaften doppelt gezählt. Das ist in den Fall aber genau richtig, da jedes Paar zwei Spiele bestreitet (heim und auswärts bzw. Hin- und Rückrunde).

c) Es gibt

$$\binom{18}{2}$$

verschiedene Paare von Mannschaften. Dabei gilt

$$\binom{18}{2} = \frac{18 \cdot 17}{2} = 9 \cdot 17 = 153.$$

Da jedes Paar zweimal gegeneinander spielt, beträgt die Anzahl der Spiele

$$2 \binom{18}{2} = 2 \cdot 153 = 306.$$

◁

(9.6) Definition. Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ ist der Binomialkoeffizient definiert durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

Dabei ist

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

und

$$0! = 1.$$

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ zählt die Möglichkeiten, k Objekte aus n Objekten auszuwählen, wenn die Reihenfolge der ausgewählten Objekte keine Rolle spielt.

◁

Die ersten Binomialkoeffizienten können im Pascalschen Dreieck angeordnet werden:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

Benachbarte Einträge liefern jeweils den darunterliegenden Eintrag. Es gilt die Rekursionsformel

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

(9.7) Beispiel. Fünf Personen haben drei Freikarten erhalten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Karten zu verteilen?

- a) Die Karten seien ununterscheidbar und jede Person könne höchstens eine Karte erhalten.

In diesem Fall müssen drei der fünf Personen ausgewählt werden. Daher gibt es

$$\binom{5}{3} = 10$$

Möglichkeiten.

- b) Die Karten seien unterscheidbar und jede Person könne höchstens eine Karte erhalten.

Für die erste Karte gibt es 5 mögliche Personen. Nach der Vergabe der ersten Karte bleiben für die zweite Karte noch 4 und für die dritte Karte noch 3 mögliche Personen. Daher gibt es

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Möglichkeiten.

◁

(9.8) Bemerkung (Das Produktprinzip). Sind mehrere Entscheidungen nacheinander zu treffen und gibt es für die einzelnen Entscheidungen

$$m_1, m_2, \dots, m_r$$

Möglichkeiten, so gibt es insgesamt

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_r$$

Möglichkeiten.

◁

(9.9) Beispiel. Wie viele verschiedene zehnstellige Zahlen können ausschließlich aus den Ziffern 1 und 2 gebildet werden?

Für jede der zehn Stellen gibt es genau zwei Möglichkeiten:

1 oder 2.

Nach dem Produktprinzip gibt es daher

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{10\text{-mal}} = 2^{10} = 1024$$

verschiedene zehnstellige Zahlen.

◁

Tag 10

Mengen und Logik

In diesem Kapitel werden grundlegende Begriffe der Aussagenlogik und Mengenlehre eingeführt. Dazu gehören logische Verknüpfungen, Wahrheitstafeln, Quantoren, Teilmengen, Potenzmengen und Mengenoperationen.

10.1 Aussagenlogik

Sind A und B Aussagen, so können daraus mithilfe logischer Operationen neue Aussagen gebildet werden.

Schreibweise	Bedeutung
$A \Rightarrow B$	Wenn A , dann B ; aus A folgt B
$A \Leftrightarrow B$	A ist äquivalent zu B ; A genau dann, wenn B
$\neg A$	nicht A
$A \vee B$	A oder B
$A \wedge B$	A und B

Die Wahrheit einer zusammengesetzten Aussage hängt von den Wahrheitswerten ihrer einzelnen Bestandteile ab.

10.1.1 Wahrheitstafeln

Die Wahrheitswerte der grundlegenden logischen Verknüpfungen können in einer Wahrheitstafel dargestellt werden. Dabei stehen w für *wahr* und f für *falsch*.

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	w	f	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Insbesondere gilt

$$A \Leftrightarrow B \iff (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

10.1.2 Tautologien

(10.1) Definition. Eine *Tautologie* ist eine Aussage, die unabhängig von den Wahrheitswerten ihrer Bestandteile immer wahr ist. $\triangleleft$

(10.2) Beispiel. Die Aussage

$$A \vee \neg A$$

ist eine Tautologie. Dies zeigt die Wahrheitstafel

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
w	f	w
f	w	w

$\triangleleft$

Weitere wichtige logische Äquivalenzen sind:

$$\begin{aligned} \neg(\neg A) &\Leftrightarrow A, \\ \neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \\ \neg(A \vee B) &\Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \\ (A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A), \\ (A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B). \end{aligned}$$

Die zweite und die dritte Äquivalenz heißen *De-Morgansche Regeln*. Die vierte Äquivalenz beschreibt die Kontraposition.

(10.3) Beispiel. Betrachte die Aussage

Alle Primzahlen größer als 2 sind ungerade.

Wir setzen

$$A = p \text{ ist eine Primzahl größer als } 2$$

und

$B = p$ ist ungerade.

Die Aussage besitzt dann die Form

$$A \Rightarrow B.$$

Die Negation lautet

$$\begin{aligned}\neg(A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \\ &\Leftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg B \\ &\Leftrightarrow A \wedge \neg B.\end{aligned}$$

Die Negation der ursprünglichen Aussage lautet somit:

Es gibt eine Primzahl größer als 2, die gerade ist.

◁

10.1.3 Quantoren

Der Allquantor

$$\forall$$

bedeutet „für alle“. Der Existenzquantor

$$\exists$$

bedeutet „es existiert“ beziehungsweise „es gibt“.

(10.4) Beispiel. a) Die Aussage

Die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ besitzt keine reelle Lösung

kann geschrieben werden als

$$\neg \left(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0 \right).$$

Äquivalent dazu ist

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \neq 0.$$

Dabei wurde die Regel

$$\neg \left(x^2 + x + 1 = 0 \right) \iff x^2 + x + 1 \neq 0$$

verwendet.

b) Die Aussage

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x > y$$

ist falsch. Sie würde bedeuten, dass es eine größte reelle Zahl gibt. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ kann jedoch beispielsweise

$$y = x + 1$$

gewählt werden. Dann gilt $y > x$.

Dagegen ist die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x > y$$

wahr. Zu einem gegebenen $x \in \mathbb{R}$ kann beispielsweise

$$y = x - 1$$

gewählt werden.

◁

(10.5) *Bemerkung.* Die Reihenfolge der Quantoren ist wesentlich. Im Allgemeinen sind die Aussagen

$$\exists x \forall y : A(x, y)$$

und

$$\forall y \exists x : A(x, y)$$

nicht äquivalent.

◁

(10.6) Beispiel. Die Stetigkeit einer Funktion f im Punkt x_0 kann mithilfe von Quantoren formuliert werden:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

◁

10.2 Mengen

(10.7) Definition. Die Schreibweise

$$a \in A$$

bedeutet, dass a ein Element der Menge A ist.

Die Schreibweise

$$x \notin A$$

bedeutet, dass x kein Element der Menge A ist.

◁

(10.8) Beispiel. Ist

$$X = \{a, b, c, d\},$$

so gilt

$$a \in X, \quad b \in X, \quad c \in X, \quad d \in$$

und kein anderes Objekt ein Element von X ist. $\triangleleft$

(10.9) Definition. Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten:

$$A = B \iff \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

$\triangleleft$

(10.10) Definition. Die Menge A heißt *Teilmenge* von B , wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist:

$$A \subseteq B \iff \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B.$$

$\triangleleft$

Für die bekannten Zahlbereiche gilt

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Die Schreibweise

$$A \subsetneq B$$

bedeutet

$$A \subseteq B \quad \text{und} \quad A \neq B.$$

In diesem Fall heißt A eine *echte Teilmenge* von B .

Für Teilmengen gelten die folgenden Eigenschaften:

a) Für jede Menge A gilt

$$A \subseteq A.$$

b) Sind

$$A \subseteq B \quad \text{und} \quad B \subseteq C,$$

so gilt

$$A \subseteq C.$$

Dies entspricht der logischen Schlussregel

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C).$$

c) Sind

$$A \subseteq B \quad \text{und} \quad B \subseteq A,$$

so gilt

$$A = B.$$

(10.11) Beispiel. Eine Menge kann durch eine Eigenschaft ihrer Elemente beschrieben werden. Beispielsweise ist

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0 \right\}$$

die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^2 + x + 1 = 0$$

über den reellen Zahlen.

Äquivalent kann man schreiben:

$$A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 + x + 1 = 0 \right\}.$$

<

Es kann vorkommen, dass kein Objekt die angegebene Eigenschaft erfüllt. Dann besitzt die Menge keine Elemente.

(10.12) Definition. Die Menge ohne Elemente heißt *leere Menge* und wird mit

$$\emptyset$$

bezeichnet.

<

(10.13) Bemerkung. Für die leere Menge gilt:

a) Für jede Menge X gilt

$$\emptyset \subseteq X.$$

b) Gilt

$$X \subseteq \emptyset,$$

so folgt

$$X = \emptyset.$$

<

(10.14) Beispiel. Da die Gleichung

$$x^2 + x + 1 = 0$$

keine reelle Lösung besitzt, gilt für die im Beispiel (10.11) definierte Menge

$$A = \emptyset.$$

<

(10.15) Definition. Die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X ist die Menge aller Teilmengen von X :

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

<

(10.16) Beispiel. Für

$$X = \{1, 2, 3\}$$

gilt

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Die Potenzmenge besitzt

$$8 = 2^3$$

Elemente.

<

(10.17) Bemerkung. Allgemein besitzt die Potenzmenge einer n -elementigen Menge genau

$$2^n$$

Elemente.

Der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k}$$

gibt die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge an. Daher gilt

$$|\mathcal{P}(X)| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

für jede n -elementige Menge X .

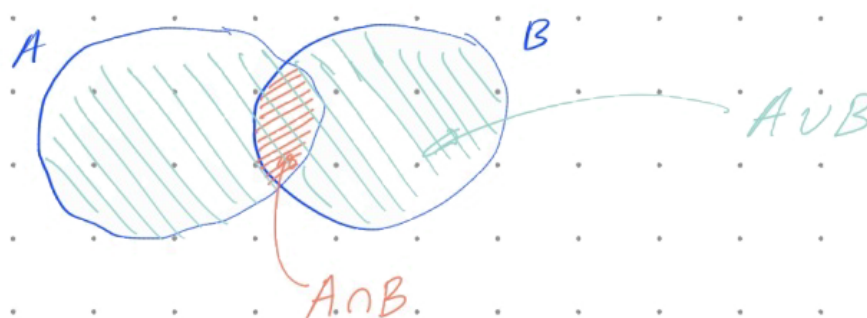
<

(10.18) Definition. Der *Schnitt* zweier Mengen A und B ist

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Die *Vereinigung* zweier Mengen A und B ist

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$



Die *Differenz* zweier Mengen A und B ist

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

◁

(10.19) Satz. Für Mengen gelten die Distributivgesetze

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

und

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(10.20) Beispiel. Wir beweisen das Distributivgesetz

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

◁

Beweis. Um die Gleichheit der Mengen zu zeigen, beweisen wir beide Inklusionen.

$\subseteq$) Sei

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

Zu zeigen ist

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aus

$$x \in A \cup (B \cap C)$$

folgt

$$x \in A \quad \text{oder} \quad x \in B \cap C.$$

Es gibt zwei Fälle.

Fall 1: Es gilt $x \in A$.

Dann gilt sowohl

$$x \in A \cup B$$

als auch

$$x \in A \cup C.$$

Somit folgt

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Fall 2: Es gilt $x \in B \cap C$.

Dann gilt

$$x \in B \quad \text{und} \quad x \in C.$$

Aus $x \in B$ folgt

$$x \in A \cup B,$$

und aus $x \in C$ folgt

$$x \in A \cup C.$$

Daher gilt ebenfalls

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Somit ist

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$\supseteq$) Sei nun

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Dann gilt

$$x \in A \cup B \quad \text{und} \quad x \in A \cup C.$$

Falls $x \in A$, folgt unmittelbar

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

Falls $x \notin A$, folgt aus $x \in A \cup B$, dass $x \in B$ gilt. Ebenso folgt aus $x \in A \cup C$, dass $x \in C$ gilt. Daher ist

$$x \in B \cap C$$

und somit

$$x \in A \cup (B \cap C).$$

Folglich gilt

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

Aus beiden Inklusionen folgt

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

□